ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ТОМ I

Л. Д. ЛАНДАУ
Е. М. ЛИФШИЦ

МЕХАНИКА

理论物理学教程 第一卷

力 学（第五版）

Л. Д. 朗道 Е. М. 栗弗席兹 著 李俊峰 鞠国兴 译校

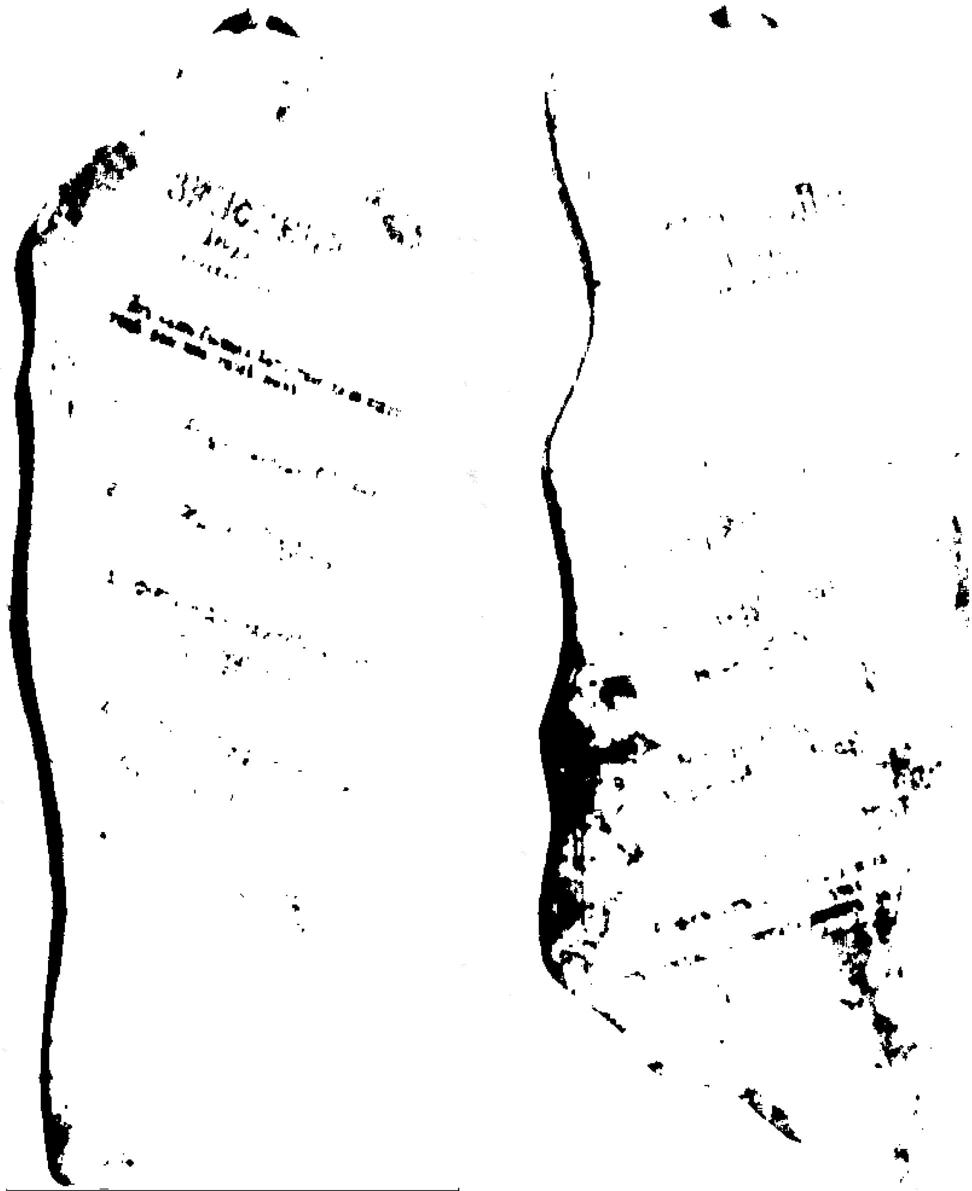
高等教育出版社



列夫·达维多维奇·朗道（1908—1968）　理论物理学家、苏联科学院院士、诺贝尔物理学奖获得者。1908年1月22日生于今阿塞拜疆共和国的首都巴库，父母是工程师和医生。朗道19岁从列宁格勒大学物理系毕业后在列宁格勒物理技术研究所开始学术生涯。1929—1931年赴德国、瑞士、荷兰、英国、比利时、丹麦等国家进修，特别是在哥本哈根，曾受益于玻尔的指引。1932—1937年，朗道在哈尔科夫担任乌克兰物理技术研究所理论部主任。从1937年起在莫斯科担任苏联科学院物理问题研究所理论部主任。朗道非常重视教学工作，曾先后在哈尔科夫大学、莫斯科大学等学校教授理论物理，撰写了大量教材和科普读物。

朗道的研究工作几乎涵盖了从流体力学到量子场论的所有理论物理学分支。1927年朗道引入量子力学中的重要概念——密度矩阵；1930年创立电子抗磁性的量子理论（相关现象被称为朗道抗磁性，电子的相应能级被称为朗道能级）；1935年创立铁磁性的磁畴理论和反铁磁性的理论解释；1936—1937年创立二级相变的一般理论和超导体的中间态理论（相关理论被称为朗道相变理论和朗道中间态结构模型）；1937年创立原子核的几率理论；1940—1941年创立液氦的超流理论（被称为朗道超流理论）和量子液体理论；1946年创立等离子体振动理论（相关现象被称为朗道阻尼）；1950年与金兹堡一起创立超导理论（金兹堡-朗道唯象理论）；1954年创立基本粒子的电荷约束理论；1956—1958年创立了费米液体的量子理论（被称为朗道费米液体理论）并提出了弱相互作用的CP不变性。

朗道于1946年当选为苏联科学院院士，曾3次获得苏联国家奖；1954年获得社会主义劳动英雄称号；1961年获得马克斯·普朗克奖章和弗里茨·伦敦奖；1962年他与栗弗席兹合著的《理论物理学教程》获得列宁奖，同年，他因为对凝聚态物质特别是液氦的开创性工作而获得了诺贝尔物理学奖。朗道还是丹麦皇家科学院院士、荷兰皇家科学院院士、英国皇家学会会员、美国国家科学院院士、美国国家艺术与科学院院士、英国和法国物理学会的荣誉会员。



“朗道十诫”石板*

1958年苏联原子能研究所为庆贺朗道50岁寿辰，送给他的刻有朗道在物理学上最重要的10项科学成果的大理石板，这10项成果是：

1. 量子力学中的密度矩阵和统计物理学（1927年）
2. 自由电子抗磁性的理论（1930年）
3. 二级相变的研究（1936—1937年）
4. 铁磁性的磁畴理论和反铁磁性的理论解释（1935年）
5. 超导体的混合态理论（1934年）
6. 原子核的概率理论（1937年）
7. 氦Ⅱ超流性的量子理论（1940—1941年）
8. 基本粒子的电荷约束理论（1954年）
9. 费米液体的量子理论（1956年）
10. 弱相互作用的CP不变性（1957年）

* Бессараб М Я. Ландау: Страницы жизни. Москва: Московский рабочий, 1988.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА ТОМ I

Л. Д. ЛАНДАУ
Е. М. ЛИФШИЦ

МЕХАНИКА



理论物理学教程 第一卷

Lixue

力 学（第五版）

Л. Д. 朗道 Е. М. 栗弗席兹 著 李俊峰 鞠国兴 译校

俄罗斯联邦教育部推荐大学物理专业教学参考书

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图字:01-2007-0910 号

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц Теоретическая физика. В 10 томах

图书在版编目(CIP)数据

力学:第 5 版/(俄罗斯)朗道,(俄罗斯)栗弗席兹著;李俊峰,鞠国兴译校.—北京:高等教育出版社,2007.4 (2010 重印)

ISBN 978-7-04-020849-8

Ⅰ.力… Ⅱ.①朗…②栗…③李…④鞠… Ⅲ.力学-高等学校-教材 Ⅳ.O3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 033678 号

策划编辑 王　超 **责任编辑** 王　超 **封面设计** 刘晓翔 **责任绘图** 朱　静

版式设计 王　莹 **责任校对** 刘　莉 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	北京中科印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　本	787×1092 1/16		
印　张	11.75	**版　次**	2007 年 4 月第 1 版
字　数	220 000	**印　次**	2010 年 7 月第 2 次印刷
插　页	1	**定　价**	35.00 元

物料号 20849-A0

重印说明

本书第二次印刷,在2007年4月第一次印刷的基础上,由南京大学物理学院鞠国兴教授依据英文版(第三版)做了全面细致的修订。

中国科学院理论物理研究所刘寄星研究员根据俄文版修订了各版的编者序以及朗道撰写的第一版序。

第四版编者序

从这本书开始，科学出版社将重新出版 Л.Д.朗道和 E.M.栗弗席兹的《理论物理学》系列教程.这是首次在栗弗席兹去世后出版.在没有原作者参与下准备全教程付印是令人悲伤的，现在这个重要任务落到了我的肩上.

这次出版的《力学》修正了第三版出版后发现的印刷错误，也为使表述更为准确做了少量文字改动.这些修改是栗弗席兹和我共同完成的，其中有一部分已经反映在本书最近的英文版中.

Л.П.皮塔耶夫斯基

1987年5月

第三版序

本书的第二版与第一版几乎没有差别.在准备这一新版时,也没有发现对本书作任何重要修改的必要,所以除去改正了印刷错误外,本书的大部分内容基本上是重印.我和Л.П.皮塔耶夫斯基一起仅对讲述浸渐不变量的最后几节进行了修改和补充.

E.M.栗弗席兹

1972年6月

第一版序

从这本书开始，我们将陆续再版《理论物理学》教程，现在的计划包括以下各卷：

1. 力学，
2. 场论，
3. 量子力学（非相对论理论），
4. 相对论量子理论，
5. 统计物理学，
6. 流体力学，
7. 弹性理论，
8. 连续介质电动力学，
9. 物理动理学.

第一卷的第一版曾于1940年由Л.朗道和Л.皮亚季戈尔斯基合著出版.这次出版，虽然拟讲述内容的总计划和以前一样，但全书经过了重大修改并完全重写了.

感谢И.Е.贾洛申斯基和Л.П.皮塔耶夫斯基在校对本书时给予的帮助.

Л.Д.朗道，Е.М.栗弗席兹

莫斯科，1957年7月

目　录

第一章

运动方程

§1 广义坐标

质点是力学的基本概念之一,是指那些在描述其运动时可以忽略大小的物体.当然,可否忽略大小因不同问题的具体条件而异.例如,研究行星绕太阳的运动时,可以认为行星是质点,但是在研究行星自转时就不能当作质点.

质点在空间的位置由其径矢 $\boldsymbol{r}$ 确定,其分量用笛卡儿坐标 x,y,z 表示.径矢 $\boldsymbol{r}$ 对时间的导数

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

称为质点的*速度*,其二阶导数 $\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2$ 称为质点的*加速度*.今后,对时间的导数经常用符号上面的点表示,如 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$.

为了确定由 N 个质点组成的系统在空间的位置,需要给定 N 个径矢,即给定 $3N$ 个坐标.

通常,唯一地确定系统位置所需独立变量的数目称为系统的*自由度*①,N 个质点组成的系统的自由度为 $3N$.这些独立变量不一定是质点的笛卡儿坐标,根据问题的条件,有时选取其它坐标更加方便.

对于 s 个自由度的系统,可以完全刻画其位置的任意 s 个变量 $q_1,q_2,\cdots,q_s$ 称为该系统的*广义坐标*,其导数 $\dot{q}_i$ 则称为*广义速度*.

---

① 这里讨论的是完整系统,非完整系统的自由度不能这样定义,参见:马尔契夫著.理论力学(第3版).李俊峰译.北京:高等教育出版社,2005:21.

——译者注

然而,给定广义坐标的数值并不能确定系统在给定时刻的“力学状态”,因为还不足以预测下一时刻系统的位置.对于给定的广义坐标值,系统可以具有任意的速度,因此下一时刻(即经过无穷小的时间间隔 dt 后)系统的位置可能不同.

经验表明,同时给定系统的所有广义坐标和速度就可以确定系统的状态,并且原则上也可以预测以后的运动.从数学观点看,在某时刻给定所有广义坐标 q 和速度 $\dot{q}$ 就唯一地确定了该时刻的加速度 $\ddot{q}$①.

加速度与坐标、速度的关系式称为*运动方程*.对于函数 $q(t)$来说,这个关系式是二阶微分方程,原则上,将其积分可以求出函数 $q(t)$,进而确定系统的运动轨迹.

§ 2 最小作用量原理

力学系统运动规律的最一般表述由*最小作用量原理*(或者*哈密顿原理*)给出.根据这个原理,每一个力学系统都可以用一个确定的函数

$$L(q_1, q_2, \cdots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s, t),$$

或者简记为 $L(q, \dot{q}, t)$所表征,并且系统的运动还要满足下面的条件.

假设在时刻 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 系统的位置由两组坐标 $q^{(1)}$和 $q^{(2)}$确定.那么,系统在这两个位置之间的运动使得积分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t \tag{2.1}$$

取最小值②.函数 L 称为给定系统的*拉格朗日函数*,积分(2.1)称为*作用量*.

拉格朗日函数中只包含 q 和 $\dot{q}$,而不包含更高阶导数 $\ddot{q}, \dddot{q}, \cdots$,这反映了前面提到的物理事实,即系统的力学状态完全由坐标和速度确定.

下面我们通过求解使积分(2.1)取最小值的问题来推导运动微分方程.为了书写简便,我们先假设系统仅有一个自由度,只需确定一个函数 $q(t)$.

设 $q=q(t)$是使 S 取最小值的函数,就是说用任意函数

$$q(t)+\delta q(t) \tag{2.2}$$

代替 $q(t)$都会使 S 增大,其中函数 $\delta q(t)$(也称为函数 $q(t)$的*变分*)在从 t_1 到 t_2 的整个时间间隔内都是小量.由于比较函数(2.2)在时刻 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 也应该分别取值为 $q^{(1)}$和 $q^{(2)}$,于是有:

$$\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0. \tag{2.3}$$

---

① 为了书写简便,我们用 q 表示所有广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_s$,用 $\dot{q}$ 表示所有广义速度.

② 然而,应该指出的是,这个最小作用量原理的表述并不是对系统的整个运动轨迹总成立,而是仅在足够小的区段上成立.对于整个轨迹来说,积分(2.1)只能取极值而不一定是最小值.当然,这对于推导运动方程没有什么影响,因为我们只需用到极值条件.

用 $q(t)+\delta q(t)$代替 $q(t)$使 S 产生的增量为

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t)\mathrm{d}t-\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t.$$

这个差中的被积函数按 δq 和 $\delta\dot{q}$ 的幂展开式是从一阶项开始的. S 取最小值①的必要条件是这些项之和等于零. 这个和称为积分的一阶变分(或者简称为变分). 于是,最小作用量原理可以写成

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t=0, \tag{2.4}$$

或者变分后的形式:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right)\mathrm{d}t=0.$$

注意到 $\delta\dot{q}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q$,将第二项分部积分得:

$$\delta S=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\bigg|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\mathrm{d}t=0. \tag{2.5}$$

根据(2.3)上式中第一项等于零. 剩下的积分在 δq 任意取值时都应该等于零. 这只有在被积函数恒等于零的情况下才有可能. 于是我们得到方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0.$$

对于有 s 个自由度的系统,在最小作用量原理中有 s 个不同的函数 $q_i(t)$应该独立地变分. 显然我们可以得到 s 个方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,s). \tag{2.6}$$

这就是我们要推导的运动微分方程,在力学中称为*拉格朗日方程*②. 如果给定力学系统的拉格朗日函数已知,则方程(2.6)建立了加速度、速度和坐标之间的联系,它们是系统的运动方程.

从数学的观点看,方程(2.6)是包含 s 个未知函数 $q_i(t)$的 s 个二阶微分方程组. 这个方程组的通解包含 $2s$ 个任意常数. 为了确定这些常数,从而完全确定力学系统的运动,必须知道描述系统在某给定时刻状态的初始条件,例如所有坐标和速度的初值.

设力学系统由 A 和 B 两部分组成,如果每个部分都是封闭的,拉格朗日函数分别是 L_A 和 L_B. 在两个部分相距足够远以至它们的相互作用可以忽略的极限情况下,系统的拉格朗日函数趋向于极限:

---

① 一般来说是极值.

② 在求积分(2.1)极值的变分计算中,这些方程称为*欧拉方程*.

$$\lim L = L_A + L_B. \tag{2.7}$$

拉格朗日函数的这种可加性反映了一个事实:每一个独立部分的运动方程不可能包含与另一部分相关的物理量.

显然,将力学系统的拉格朗日函数乘以一个任意常数,不会改变运动微分方程.这似乎导致一种重要的不确定性:各个孤立力学系统的拉格朗日函数可以乘以不同的任意常数.然而,可加性消除了这个不确定性,只允许所有力学系统的拉格朗日函数都乘以同一个任意常数,而这归结为选择这个物理量度量单位的自然任意性,我们还将在§4中继续讨论这个问题.

我们还需要进行以下的一般性讨论.考虑两个拉格朗日函数 $L'(q,\dot{q},t)$和 $L(q,\dot{q},t)$,它们相差某个坐标和时间的函数 $f(q,t)$对时间的全导数:

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(q,t). \tag{2.8}$$

计算这两个拉格朗日函数对应的积分(2.1)可得关系式:

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L'(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(q,t)\mathrm{d}t \\ &= S + f(q^{(2)},t_2) - f(q^{(1)},t_1), \end{aligned}$$

即 S 和 S' 相差一个附加项.该附加项在变分时将消失,条件 $\delta S' = 0$ 和 $\delta S = 0$ 完全等价,因而运动微分方程也相同.

可见,拉格朗日函数仅可以定义到相差一个对时间和坐标的任意函数的时间全导数项.

§3 伽利略相对性原理

为了研究力学现象必须选择*参考系*.一般来说运动规律在不同的参考系下具有不同的形式.假如任意选择参考系,则可能使确定非常简单现象的规律在形式上变得十分繁琐.这自然会产生一个问题,即如何选择参考系使得力学规律在形式上最简单.

相对于任意参考系,空间是非均匀且各向异性的.这就是说,如果某个物体与其它物体之间没有相互作用,它在空间中的不同位置和不同指向在力学意义上是不等价的.同样,一般情况下任意参考系中时间也是非均匀的,即不同时刻也是不等价的.显然,时间和空间的这些性质使力学现象的描述变得复杂.例如,自由物体(即不受任何外力作用)不可能保持静止:如果在某个时刻其速度等于零,但在下一个时刻它开始向某个方向运动.

然而,似乎总是存在某种参考系,空间相对它是均匀的各向同性的,时间相对它是均匀的.这样的参考系称为*惯性参考系*.特别是,在这样的惯性参考系中,在某个时刻静止的自由物体将永远保持静止.

对于在惯性参考系中自由运动的质点，我们立即可以得到其拉格朗日函数形式的一些结论.时间和空间的均匀性意味着这个函数不显含质点的径矢 $\boldsymbol{r}$ 和时间 t，即 L 只能是速度 $\boldsymbol{v}$ 的函数. 由于空间各向同性，拉格朗日函数也必是不依赖于矢量 $\boldsymbol{v}$ 的方向，只能是速度大小的函数，也就是说 L 是 $\boldsymbol{v}^2 = v^2$ 的函数：

$$L = L(v^2). \tag{3.1}$$

由拉格朗日函数不显含质点的径矢 $\boldsymbol{r}$ 可知 $\partial L/\partial \boldsymbol{r} = 0$，拉格朗日方程可写成[①]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = 0,$$

由此可得 $\partial L/\partial \boldsymbol{v} = \text{const}$. 而 $\partial L/\partial \boldsymbol{v}$ 只是速度的函数，故

$$\boldsymbol{v} = \text{const}. \tag{3.2}$$

可见，在惯性参考系中质点任何自由运动的速度的大小和方向都不改变. 这就是*惯性定律*.

如果在我们已有的这个惯性参考系以外，再引进另一个惯性参考系，它相对第一个惯性参考系作匀速直线运动，则相对这两个参考系的自由运动规律完全相同：自由运动仍是匀速直线运动.

实验证明，不仅自由运动规律相对这两个参考系完全相同，所有力学关系式相对这两个参考系都是等价的. 因此存在不只是一个，而是无穷多个惯性参考系，它们相互作匀速直线运动. 在这些参考系中时间和空间的性质都是相同的，力学规律也是相同的. 这个结论称为*伽利略相对性原理*，这是力学中最重要的原理之一.

上面的论述充分表明，惯性参考系的特殊性决定了人们通常采用惯性系来研究力学现象. 今后如果不特别声明，我们只在惯性参考系中研究问题.

无穷多个这样的参考系的力学上的完全等价性还表明，不存在比其它参考系更优先选取的一个“绝对”惯性参考系.

设有两个不同的参考系 K 和 K′，其中 K′ 相对 K 以速度 $\boldsymbol{V}$ 运动，同一个质点相对这两个参考系的坐标 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 满足关系式

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V}t. \tag{3.3}$$

我们认为这两个参考系中的时间是相同的：

$$t = t'. \tag{3.4}$$

绝对时间假设是经典力学的基础之一[②].

公式(3.3)和(3.4)称为*伽利略变换*. 伽利略相对性原理可以表述为：力学运动方程在伽利略变换下具有不变性.

---

① 标量对矢量的偏导数也是矢量，其分量分别等于该标量分别对矢量各个分量的偏导数.

② 这个假设在相对论力学中不成立.

§4 自由质点的拉格朗日函数

下面研究拉格朗日函数的形式，首先研究一个最简单的例子——质点相对惯性参考系的自由运动.我们已经知道，这种情况下拉格朗日函数只能依赖于速度的平方.我们利用伽利略相对性原理来确定这个依赖关系的形式.如果惯性参考系 K 以无穷小速度 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 相对另一惯性参考系 K′运动，则有 $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\varepsilon}$.拉格朗日函数 $L(v^2)$ 经过伽利略变换后得到 L'，由于在所有惯性参考系中运动方程的形式都相同，故如果 L' 与 $L(v^2)$ 存在差异的话，只能相差某个关于时间和坐标的函数的全导数(参见§2 末).

于是有

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} + \varepsilon^2).$$

将这个表达式展开成 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的幂级数并忽略一阶以上的无穷小量得：

$$L(v'^2) = L(v^2) + 2\frac{\partial L}{\partial v^2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}.$$

只有当该等式右边第二项与速度 $\boldsymbol{v}$ 呈线性依赖关系时，它才能是时间的全导数.因此 $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ 不依赖于速度，即该情况下拉格朗日函数与速度平方成正比：

$$L = \frac{m}{2}v^2, \tag{4.1}$$

其中 m 为常数.

由拉格朗日函数在速度无穷小变换下满足伽利略相对性原理可知，在参考系 K 以有限速度 $\boldsymbol{V}$ 相对 K′运动情况下，拉格朗日函数也满足该原理.事实上，

$$L' = \frac{m}{2}v'^2 = \frac{m}{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{V})^2 = \frac{m}{2}v^2 + 2\frac{m}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{V} + \frac{m}{2}V^2$$

或者

$$L' = L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2\frac{m}{2}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V} + \frac{m}{2}V^2 t\right).$$

第二项是时间的全导数，可以略去.

出现在自由运动质点的拉格朗日函数(4.1)中的物理量 m 称为质点的质量.根据拉格朗日函数的可加性，对于无相互作用的质点组成的自由质点系，有①

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}. \tag{4.2}$$

必须强调，只有考虑到可加性，给出的质量定义才有实际物理意义.在§2

① 我们用拉丁字母表中前几个字母表示质点的编号，用 i,k,l 给坐标编号.

曾经指出,总是可以将拉格朗日函数乘以常数而不改变方程.对于函数(4.2),乘以常数就相当于改变了质量的单位,不同质点的质量之间的比例关系却是具有实际物理意义的,不会发生改变.

容易看出,质量不可能是负的.事实上,根据最小作用量原理,质点从空间点 1 到空间点 2 的真实运动,使得积分

$$S = \int_1^2 \frac{mv^2}{2}\mathrm{d}t$$

取最小值.假如质量是负的,对于质点快速离开点 1 再快速接近点 2 的轨迹,作用量可以取绝对值任意大的负值,不可能有最小值①.

注意到

$$v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}l^2}{\mathrm{d}t^2}, \tag{4.3}$$

是有用的.因此为了得到拉格朗日函数只需求出在特定坐标系中弧长微元 $\mathrm{d}l$ 的平方.

例如,在笛卡儿坐标系中 $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$,进而有

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \tag{4.4}$$

在柱坐标系中 $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2$,进而有

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2), \tag{4.5}$$

在球坐标系中 $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$,进而有

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2). \tag{4.6}$$

§5　质点系的拉格朗日函数

下面研究一种质点系,其质点之间有相互作用,但不受外部任何物体作用,称为封闭质点系.为了描述质点之间的相互作用,可以在自由质点系的拉格朗日函数(4.2)中增加坐标的某一函数(根据相互作用的性质确定).②将这个函数记为 $-U$,则有

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots) \tag{5.1}$$

其中 $\boldsymbol{r}_a$ 是第 a 个质点的径矢.这是封闭质点系拉格朗日函数的一般形式.

函数 U 称为质点系的势能,而

① 在第 2 页的脚注②中给出的说明不会影响这个结论,因为 $m<0$ 时积分在轨迹上任意小区间都不可能有最小值.

② 这个结论限于本书所述的经典(非相对论)力学范畴.

$$T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$$

称为质点系的动能,这些名称的含义将在§6中解释.

势能仅依赖于所有质点在同一时刻的位置,这意味着其中任何质点位置的改变立刻影响到所有其它质点,可以说相互作用瞬间传递.这个相互作用的性质在经典力学中是必然的,它紧密联系着经典力学的基本前提,即绝对时间假设和伽利略相对性原理.如果相互作用不是瞬间传递的,即以一个有限速度传递,而时间的绝对性意味着通常的速度相加法则适用于所有现象,因此在有相对运动的不同参考系中传递速度不相同.于是相互作用的物体的运动规律在不同惯性参考系中也不相同,这就违背了伽利略相对性原理.

在§3中我们只提到了时间的均匀性.拉格朗日函数的形式(5.1)表明,时间不仅是均匀的,而且是各向同性的,即时间的性质在两个方向上都是相同的.事实上,用 $-t$ 代替 t 不会改变拉格朗日函数,进而也不会改变运动方程.换句话说,如果在参考系中某种运动是可能的,则逆运动也是可能的,即可以按照相反的顺序经历前述运动中相同的状态.在这个意义下,遵循经典力学定律的所有运动都是可逆的.

知道拉格朗日函数后就可以建立运动方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}. \tag{5.2}$$

将(5.1)代入后得:

$$m_a \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_a}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}. \tag{5.3}$$

这种形式的运动方程称为*牛顿方程*,是相互作用质点系力学的基础.方程(5.3)右端的矢量

$$\boldsymbol{F}_a = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a} \tag{5.4}$$

称为作用在第 a 个质点上的*力*.它与 U 一样,只依赖于所有质点的坐标,而不依赖于速度.因此,方程(5.3)表明,质点的加速度矢量也只是坐标的函数.

势能可以增减任意常数而不改变运动方程(这是在§2末讲到的拉格朗日函数不确定性的特殊情况).选择这个任意常数的最自然和最通用的方法是,当无限增大质点间距离时势能趋向于零.

如果描述运动不是用笛卡儿坐标,而是用任意的广义坐标 q_i,则为了得到新的拉格朗日函数必须进行相应的变换:

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \cdots, q_s),\quad \dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k}\dot{q}_k,\quad \cdots,$$

将这些表达式代入函数

$$L = \frac{1}{2}\sum_a m_a(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U,$$

可得如下形式的拉格朗日函数：

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k - U(q), \tag{5.5}$$

其中 a_{ik} 只是广义坐标的函数. 用广义坐标写出的动能仍是速度的二次函数，但也可以依赖于广义坐标.

到此为止我们只研究了封闭质点系. 下面研究非封闭质点系 A，它与运动完全已知的质点系 B 相互作用. 这种情况下称 A 在(由 B 产生的)给定的外场中运动. 根据最小作用量原理推导运动方程是要对每个广义坐标进行独立变分(即把其余坐标看作好像是已知的)，因此，可将质点系 $A+B$ 的拉格朗日函数 L 中广义坐标 q_B 用给定的时间函数代替，由此得到质点系 A 的拉格朗日函数 L_A.

假设质点系 $A+B$ 是封闭的，则有

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B),$$

其中前两项分别是系统 A 和 B 的动能，第三项是 $A+B$ 的势能. 将广义坐标 q_B 用已知的时间函数代替后，$T_B(q_B, \dot{q}_B)$ 是只依赖于时间的函数(因此也是某个时间函数的全导数)，可以从 L 中略去. 于是

$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t)).$$

可见，在外场中的质点系的运动由通常形式的拉格朗日函数描述，仅有的差别就在于势能可能显含时间.

例如，对于在外场中运动的单个质点，拉格朗日函数的一般形式为

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(\boldsymbol{r}, t), \tag{5.6}$$

而运动方程写成

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{5.7}$$

如果一质点在一个场中的任意位置都受到相同的力 $\boldsymbol{F}$，则称这样的外场是均匀的. 显然在均匀外场中势能可以写成

$$U = -\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}. \tag{5.8}$$

在结束本节之前，我们还需对拉格朗日方程在各种问题中如何应用做些说明. 我们经常需要处理这样的力学系统，其中不同物体(或质点)之间的相互作用以约束的形式呈现，即限制它们的相对位置.

实际上这种约束是通过杆、线、铰等实现的. 这给运动带来新的影响因素，即运动伴有接触处的摩擦. 一般来说，这个问题超越了纯力学的范畴(参见§25).

然而,很多情况下摩擦是比较弱的,它对运动的影响可以忽略.如果还可以忽略“连接物”的质量,则约束的作用仅仅是减少系统的自由度 s 到小于 $3N$ 的值.这样又可以利用拉格朗日函数(5.5)来确定运动,独立的广义坐标数就等于实际自由度.

习 题

试求下面在均匀重力场(重力加速度为 g)中各系统的拉格朗日函数.

习题 1 平面双摆(图 1).

解:取绳 l_1 和 l_2 分别与竖直方向的夹角 φ_1 和 φ_2 为广义坐标.对质点 m_1 有

$$T_1=\frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\varphi}_1^2,\qquad U_1=-m_1gl_1\cos\varphi_1.$$

为了求出第二个质点的动能,我们用角 φ_1 和 φ_2 表示第二个质点的笛卡儿坐标 x_2,y_2(坐标原点取在悬挂点,y 轴竖直向下):

$$x_2=l_1\sin\varphi_1+l_2\sin\varphi_2,\qquad y_2=l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\varphi_2.$$

于是有

$$T_2=\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)=\frac{m_2}{2}[l_1^2\dot{\varphi}_1^2+l_2^2\dot{\varphi}_2^2+2l_1l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2].$$

$$U_2=-m_2g(y_1+y_2)=-m_2g(l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\varphi_2)$$

最后得

$$L=\frac{m_1+m_2}{2}l_1^2\dot{\varphi}_1^2+\frac{m_2}{2}l_2^2\dot{\varphi}_2^2+m_2l_1l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2+$$
$$(m_1+m_2)gl_1\cos\varphi_1+m_2gl_2\cos\varphi_2.$$

习题 2 质量为 m_2 的平面摆,其悬挂点(质量为 m_1)可以沿着位于 m_2 运动平面内的水平直线运动(图 2).

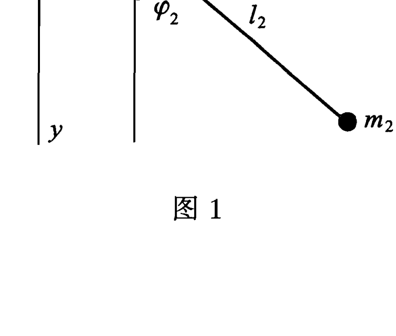


图 1

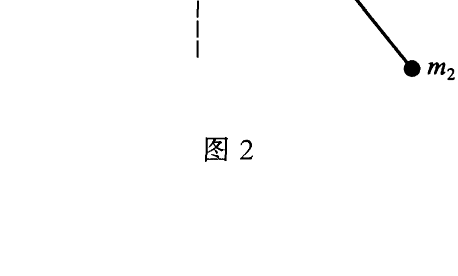


图 2

解：设质点 m_1 的坐标为 x，绳与竖直方向夹角为 φ，则有

$$L=\frac{m_1+m_2}{2}\dot{x}^2+\frac{m_2}{2}(l^2\dot{\varphi}^2+2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi)+m_2gl\cos\varphi.$$

习题 3 设有一平面摆，其悬挂点：

a. 沿着竖直圆以定常圆频率 γ 运动(图 3)，

b. 按规律 $a\cos\gamma t$ 在摆的运动平面内水平振动，

c. 按规律 $a\cos\gamma t$ 竖直振动.

解：

a. 质点 m 的坐标为：

$$x=a\cos\gamma t+l\sin\varphi,\qquad y=-a\sin\gamma t+l\cos\varphi.$$

拉格朗日函数为

$$L=\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2+mla\gamma^2\sin(\varphi-\gamma t)+mgl\cos\varphi.$$

这里略去了仅仅依赖于时间的项以及可以写为 $mla\gamma\cos(\varphi-\gamma t)$对时间的全导数的项.

b. 质点 m 的坐标为：

$$x=a\cos\gamma t+l\sin\varphi,\qquad y=l\cos\varphi.$$

略去全导数项后的拉格朗日函数为

$$L=\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2+mla\gamma^2\cos\gamma t\sin\varphi+mgl\cos\varphi.$$

c. 类似地，可得：

$$L=\frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2+mla\gamma^2\cos\gamma t\cos\varphi+mgl\cos\varphi.$$

习题 4 在图4所示的力学系统中，质点 m_2 沿着竖直轴运动，整个系统以常角速度 Ω 绕该轴转动.

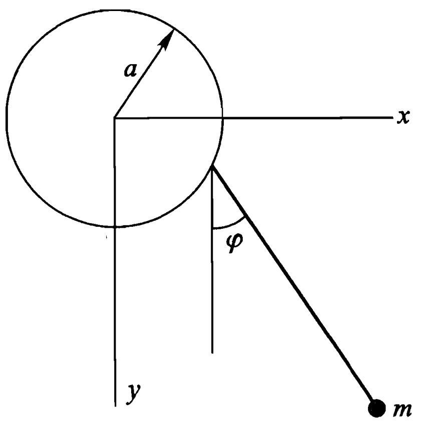


图 3

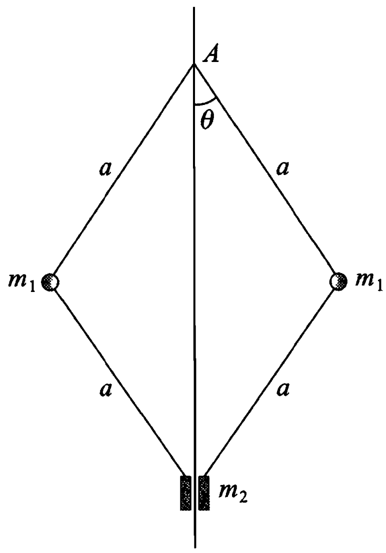


图 4

解：设线段 a 与竖直方向夹角为 θ，系统绕竖直轴转动的角度为 φ，则 $\dot{\varphi}=\Omega$. 对于每个质点 m_1 的微小位移有

$$dl_1^2=a^2d\theta^2+a^2\sin^2\theta d\varphi^2.$$

质点 m_2 到悬挂点 A 的距离为 $2a\cos\theta$，因此

$$dl_2=-2a\sin\theta d\theta.$$

拉格朗日函数为

$$L=m_1a^2(\dot{\theta}^2+\Omega^2\sin^2\theta)+2m_2a^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2+2ga(m_1+m_2)\cos\theta.$$

第二章

守恒定律

§6 能量

在力学系统运动过程中，描述其状态的 $2s$ 个变量 $q_i, \dot{q}_i \quad (i=1,2,\cdots,s)$ 随时间变化. 但是存在关于这些变量的某些函数，其值在运动过程中保持恒定，且仅由初始条件决定，这样的函数称为*运动积分*.

对于具有 s 个自由度的封闭力学系统，独立的运动积分数等于 $2s-1$，这从下面简单的论证中很容易得出. 运动方程通解中包含 $2s$ 个任意常数(参见方程(2.6)下面的讨论). 由于封闭系统的运动方程不显含时间，所以可以完全任意选择初始时刻，总可以将方程解中的任意常数之一选作时间的可加常数 t_0. 从 $2s$ 个函数

$$q_i = q_i(t+t_0, C_1, C_2, \cdots, C_{2s-1}),$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t+t_0, C_1, C_2, \cdots, C_{2s-1}),$$

中消去 $t+t_0$，将 $2s-1$ 个任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_{2s-1}$ 表示成 $q_i, \dot{q}_i$ 的函数，这些函数就是运动积分.

然而，并不是所有的运动积分在力学中有相同的重要性，其中一些运动积分源自时间和空间的均匀性和各向同性这样的基本性质，这种运动积分的恒定不变性才具有深刻的意义. 由这些运动积分表示的量是守恒量，它们具有一个重要的共同性质——可加性. 对于几个相互独立部分组成的系统，守恒量的值等于各个部分相应值之和.

可加性使相应的物理量在力学中具有特别重要的作用. 例如，假设两个物体在某时间间隔内相互作用. 由于在相互作用发生前后，整个系统的每个可加运动

积分值就等于两物体相应值之和,如果已知作用发生前各个物体的运动状态,那么通过守恒定律就能立即得到与相互作用发生后各物体运动状态有关的各种结论.

我们首先介绍时间均匀性导出的守恒定律.

由于时间具有均匀性,封闭系统的拉格朗日函数不显含时间.因此拉格朗日函数对时间的全导数可以写成

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

(如果 L 显含时间,右端还应该有$\partial L/\partial t$).利用拉格朗日方程将$\partial L/\partial q_i$ 替换为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$,得

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\sum_i\dot{q}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i=\sum_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L\right)=0.$$

由此可知

$$E=\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L \tag{6.1}$$

在封闭系统运动中保持不变,是运动积分,称为系统的能量.根据(6.1),能量与拉格朗日函数的关系是线性的,由拉格朗日函数的可加性可以直接得出能量的可加性.

在上述推导中仅仅利用了拉格朗日函数不显含时间的性质,所以能量守恒定律不仅对于封闭系统成立,对位于定常外场(即不显含时间)中的系统也成立.能量守恒的力学系统也称为*保守系统*.

在§5我们已经知道,封闭(或者位于定常外场中的)系统的拉格朗日函数可写成

$$L=T(q,\dot{q})-U(q),$$

其中 T 是速度的二次函数.利用著名的齐次函数的欧拉定理可得

$$\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=2T.$$

将此式代入(6.1)得

$$E=T(q,\dot{q})+U(q), \tag{6.2}$$

用笛卡儿坐标写成

$$E = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots). \tag{6.3}$$

可见,系统的能量可以表示为本质不同的两项之和:依赖于速度的动能和仅仅依赖于质点坐标的势能.

§7　动量

另一个守恒定律与空间的均匀性相关.

根据空间均匀性,封闭力学系统在空间中整体平移时,其性质保持不变.因此我们研究一个无穷小平移 $\boldsymbol{\varepsilon}$,并求拉格朗日函数保持不变的条件.

平移就是将系统中所有质点移动相同的位移 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的变换,即径矢 $\boldsymbol{r}_a \to \boldsymbol{r}_a + \boldsymbol{\varepsilon}$.在速度不变时,坐标的无穷小的改变使拉格朗日函数产生的变化为

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} \cdot \delta \boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a},$$

其中求和是对系统中的所有质点进行的.对任意 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 要求 $\delta L = 0$ 等价于

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} = 0. \tag{7.1}$$

根据拉格朗日方程(5.2)得

$$\sum_a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = 0.$$

于是我们可得结论:封闭力学系统的矢量

$$\boldsymbol{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} \tag{7.2}$$

在运动中保持不变.矢量 $\boldsymbol{P}$ 称为系统的动量.对拉格朗日函数(5.1)求导可得用质点速度表示的动量:

$$\boldsymbol{P} = \sum_a m_a \boldsymbol{v}_a. \tag{7.3}$$

动量的可加性是显然的.与能量不同之处在于,无论质点之间的相互作用是否可以忽略,系统的动量都等于各个质点的动量

$$\boldsymbol{p}_a = m_a \boldsymbol{v}_a$$

之和.

只有在没有外场的情况下,动量矢量的三个分量都守恒.然而,在有外场的情况下,如果势能不显含某个笛卡儿坐标,则相应的该方向的动量分量守恒.显然,沿着这个不出现在势能中的坐标相应的坐标轴平移不会改变力学系统的性质,动量在该轴上投影守恒.例如,在方向沿着 z 轴的均匀场中,沿着 x 和 y 轴的动量分量守恒.

等式(7.1)的物理含义非常简单.导数 $\partial L/\partial \boldsymbol{r}_a = -\partial U/\partial \boldsymbol{r}_a$ 是作用在第 a 个

质点上的力 $\boldsymbol{F}_a$. 等式(7.1)表明,作用在封闭系统的所有质点上的力之和等于零:

$$\sum_a \boldsymbol{F}_a = 0. \tag{7.4}$$

特别地,当系统只由两个质点组成时,$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0$,两个质点的相互作用力大小相等、方向相反.这就是著名的作用与反作用互等定律(牛顿第三定律).

如果用广义坐标 q_i 描述运动,则拉格朗日函数对广义速度的导数

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{7.5}$$

称为广义动量,而它对广义坐标的导数

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{7.6}$$

称为广义力.采用上述符号,拉格朗日方程可以写成

$$\dot{p}_i = F_i. \tag{7.7}$$

在笛卡儿坐标下广义动量就是矢量 $\boldsymbol{p}_a$ 的分量.一般情况下 p_i 是广义速度 $\dot{q}_i$ 的线性齐次函数,不能化为质量与速度的积.

习　　题

习题　质量为 m 的质点以速度 $\boldsymbol{v}_1$ 从一个势能为常数 U_1 的半空间运动到另一个势能为常数 U_2 的半空间.求质点运动方向的改变.

解:势能不依赖于其轴平行两个半空间分界面的坐标,因此质点动量在该分界面上的投影守恒.用 θ_1,θ_2 表示质点穿越分界面前后速度 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 与分界面法线的夹角,于是有:$v_1\sin\theta_1 = v_2\sin\theta_2$. v_1 和 v_2 之间的关系由能量守恒定律给出,最后可求得

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv_1^2}(U_1 - U_2)}.$$

§8　质心

封闭系统的动量对于不同的惯性参考系有不同的值.如果参考系 K′相对参考系 K 以速度 $\boldsymbol{V}$ 运动,则质点相对这两个参考系的速度 $\boldsymbol{v}_a'$ 和 $\boldsymbol{v}_a$ 满足关系式 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_a' + \boldsymbol{V}$.因此在这两个参考系中动量值 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{P}'$ 满足关系式

$$\boldsymbol{P} = \sum_a m_a \boldsymbol{v}_a = \sum_a m_a \boldsymbol{v}_a' + \boldsymbol{V}\sum_a m_a,$$

或者

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}' + \boldsymbol{V}\sum_a m_a. \tag{8.1}$$

特别地,一定存在使得总动量等于零的参考系 K′. 令(8.1)中 $\boldsymbol{P}'=0$,求得参考系 K′的速度为

$$\boldsymbol{V}=\frac{\boldsymbol{P}}{\sum m_a}=\frac{\sum m_a \boldsymbol{v}_a}{\sum m_a}. \tag{8.2}$$

如果在给定参考系下力学系统的总动量为零,则称系统相对该参考系静止. 这是单个质点静止概念的自然推广. 公式(8.2)给出的速度 $\boldsymbol{V}$,具有动量不为零的力学系统"整体运动"速度的含义. 由此可见,动量守恒定律自然地给出了系统整体静止和速度的概念.

公式(8.2)还表明,动量 $\boldsymbol{P}$ 和系统整体运动速度 $\boldsymbol{V}$ 的关系,就如同一个质点动量和速度的关系,该质点的质量等于系统中所有质点的质量之和 $\mu=\sum m_a$. 这正表示了质量的可加性.

公式(8.2)右端可以看作是下面表达式对时间的导数

$$\boldsymbol{R}=\frac{\sum m_a \boldsymbol{r}_a}{\sum m_a}. \tag{8.3}$$

可以说,系统整体运动速度就是径矢为(8.3)的点在空间中的运动速度,这个点称为系统的质心.

封闭系统动量守恒定律可以表述为:系统的质心作匀速直线运动. 这是§3 给出的单一自由质点惯性定律的推广,单一自由质点的质心就是质点本身.

在研究封闭系统的力学性质时,自然采用质心静止的参考系,这就可以不必研究系统整体的匀速直线运动,这样的运动并不重要.

整体静止的力学系统的能量通常称为内能 E_{int},它包括系统内质点的相对运动动能和相互作用势能. 以速度 $\boldsymbol{V}$ 作整体运动的系统的能量可以写成

$$E=\frac{\mu V^2}{2}+E_{\text{int}}. \tag{8.4}$$

尽管这个公式非常显然,但我们还是给出以下推导. 力学系统相对参考系 K 和 K′的能量 E 和 E' 的关系为

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\sum_a m_a v_a^2+U=\frac{1}{2}\sum_a m_a(\boldsymbol{v}_a'+\boldsymbol{V})^2+U \\ &= \frac{\mu V^2}{2}+\boldsymbol{V}\cdot\sum_a m_a \boldsymbol{v}_a'+\frac{1}{2}\sum_a m_a v_a'^2+U \end{aligned}$$

或者

$$E=E'+\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{P}'+\frac{\mu V^2}{2}. \tag{8.5}$$

这个公式给出了相对两个不同惯性参考系的能量关系,类似于公式(8.1)给出的动量关系. 如果在参考系 K′中系统质心静止,则 $\boldsymbol{P}'=0$, $E'=E_{\text{int}}$,这时就得到公式(8.4).

习　　题

习题　求相对两个不同惯性参考系的作用量之间的变换关系.

解: 拉格朗日函数等于动能和势能之差,显然,它按照类似于公式(8.5)的形式变换

$$L = L' + \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{P}' + \frac{\mu V^2}{2}.$$

将该等式对时间积分可得所要求的作用量的变换关系

$$S = S' + \mu\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}' + \frac{\mu V^2}{2}t,$$

其中 $\boldsymbol{R}'$是在参考系 K′中系统的质心的径矢.

§9　角动量

下面研究由空间各向同性得到的守恒定律.

各向同性意味着封闭系统整体在空间中任意转动时,力学性质保持不变.因此,我们研究系统整体的无穷小转动并求出拉格朗日函数保持不变的条件.

我们引入无穷小转动矢量 $\delta\boldsymbol{\varphi}$,其大小等于转角 $\delta\varphi$,方向沿着转动轴(转动方向与 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ 的方向之间符合右手螺旋法则).

我们首先研究,在系统转动时,从坐标原点(位于转动轴上)指向系统中任意质点的径矢的位移.径矢端点的线位移与转角的关系为(如图 5 所示)

$$|\delta\boldsymbol{r}| = r\sin\theta\cdot\delta\varphi.$$

位移矢量的方向垂直过 $\boldsymbol{r}$ 和 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ 的平面.显然有

$$\delta\boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}. \tag{9.1}$$

在系统转动时不仅径矢的方向改变,而且所有质点的速度也改变,并且所有矢量的变化规律相同.所以速度相对固定坐标系的增量为

$$\delta\boldsymbol{v} = \delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{v}. \tag{9.2}$$

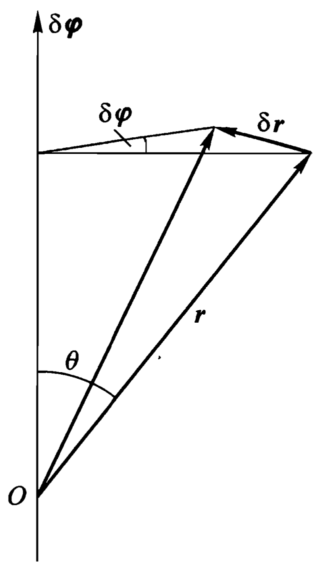


图 5

将这些表达式代入转动时拉格朗日函数不变的条件

$$\delta L = \sum_a\left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}_a}\cdot\delta\boldsymbol{r}_a + \frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}_a}\cdot\delta\boldsymbol{v}_a\right) = 0$$

并做代换$\partial L/\partial\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{p}_a$, $\partial L/\partial\boldsymbol{r}_a = \dot{\boldsymbol{p}}_a$,得

$$\sum_a[\dot{\boldsymbol{p}}_a\cdot(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}_a) + \boldsymbol{p}_a\cdot(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{v}_a)] = 0,$$

置换因子的次序并将 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ 移到求和号之外,

$$\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\sum_a(\boldsymbol{r}_a\times\dot{\boldsymbol{p}}_a + \boldsymbol{v}_a\times\boldsymbol{p}_a) = \delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_a\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{p}_a = 0.$$

由 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ 的任意性可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{p}_a = 0,$$

即在封闭力学系统运动过程中矢量

$$\boldsymbol{M} = \sum_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{p}_a \tag{9.3}$$

保持不变,这个物理量称为系统的角动量①.类似于线动量,这个物理量不依赖于质点之间是否有相互作用,它的可加性是显然的.

可加的运动积分就这些.就是说,任何封闭系统总共有 7 个这样的运动积分:能量、动量的三个分量和角动量的三个分量.

既然在角动量的定义中出现了质点的径矢,它的取值通常就与坐标原点的选取有关.假定两个坐标原点相差矢量 $\boldsymbol{a}$,同一个点对这两个坐标原点的径矢分别为 $\boldsymbol{r}_a$ 和 $\boldsymbol{r}'_a$,则有关系式 $\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{r}'_a + \boldsymbol{a}$.因此有

$$\boldsymbol{M} = \sum_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{p}_a = \sum_a \boldsymbol{r}'_a \times \boldsymbol{p}_a + \boldsymbol{a} \times \sum_a \boldsymbol{p}_a,$$

即

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{P}. \tag{9.4}$$

由此可知,只有在系统整体静止(即 $\boldsymbol{P} = 0$)时,其角动量不依赖于坐标原点的选择.角动量值的这种不确定性不会影响到角动量守恒定律,因为封闭系统的动量也守恒.

我们来推导相对不同惯性参考系 K 和 K′的角动量之间的关系.设参考系 K′相对 K 的速度为 $\boldsymbol{V}$,假定它们的坐标原点在某给定时刻重合.那么质点相对两个参考系的径矢相同,速度满足关系式:$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}'_a + \boldsymbol{V}$.于是有

$$\boldsymbol{M} = \sum_a m_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{v}_a = \sum_a m_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{v}'_a + \sum_a m_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{V}.$$

右端第一项是相对参考系 K′的角动量 $\boldsymbol{M}'$,在第二项中利用质心径矢公式(8.3),可得

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' + \mu \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V}. \tag{9.5}$$

这个公式给出了相对不同参考系的角动量之间的变换关系,与能量关系式(8.1)和动量关系式(8.5)类似.

如果系统整体相对参考系 K′静止,则 $\boldsymbol{V}$ 是系统质心的速度,而 $\mu\boldsymbol{V}$ 是系统相对于参考系 K 的总动量 $\boldsymbol{P}$,进而有

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P}. \tag{9.6}$$

就是说,力学系统的角动量由其相对静止的参考系中的“内禀角动量”和整体运

① 也称动量矩.

动的角动量 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{P}$ 构成.

虽然只有封闭系统的角动量(对任意坐标原点)三个分量都守恒,但是在一定限制下,这个守恒定律对于在外场中运动的系统也成立.从上面推导可以看出,角动量在外场的对称轴上投影总是守恒的,因为绕该轴转动时系统力学性质不变.当然,这时角动量计算是相对于位于该轴上的任意点(坐标原点)的.

最重要的情况是中心对称外场,即势能仅仅依赖于到空间中某个特定点(中心)的距离.显然,在这种场内运动时,系统角动量在任意过中心的轴上投影都守恒.就是说,系统相对场中心的角动量 $\boldsymbol{M}$ 守恒.

另一个例子是,在沿着 z 轴的均匀场中角动量投影 M_z 守恒,并且坐标原点可以任意选取.

应该指出,角动量在任意轴(我们就取为 z 轴)上的投影,都可以由对拉格朗日函数的微分求得:

$$M_z=\sum_a\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_a},\tag{9.7}$$

其中坐标 φ 是绕 z 轴的转角.根据前面给出的角动量守恒定律的证明过程,这个结论是显然的,也可以直接计算来验证.利用柱坐标 r,φ,z 代入 $x_a=r_a\cos\varphi_a,y_a=r_a\sin\varphi_a$,有:

$$M_z=\sum_a m_a(x_a\dot{y}_a-y_a\dot{x}_a)=\sum_a m_a r_a^2\dot{\varphi}_a.\tag{9.8}$$

另一方面,用这些坐标表示时,拉格朗日函数可以写成

$$L=\frac{1}{2}\sum_a m_a(\dot{r}_a^2+r_a^2\dot{\varphi}_a+\dot{z}_a^2)-U.$$

将它代入(9.7)即可得(9.8).

习　题

习题 1　用柱坐标 r,φ,z 表示质点角动量的笛卡儿坐标分量以及角动量的大小.

答案:

$$M_x=m\sin\varphi(r\dot{z}-z\dot{r})-mrz\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

$$M_y=m\cos\varphi(z\dot{r}-r\dot{z})-mrz\dot{\varphi}\sin\varphi,$$

$$M_z=mr^2\dot{\varphi},$$

$$M^2=m^2r^2\dot{\varphi}^2(r^2+z^2)+m^2(r\dot{z}-z\dot{r})^2.$$

习题 2　用球坐标 r,θ,φ 表示质点角动量的笛卡儿坐标分量以及角动量的大小.

答案:

$$M_x = -mr^2(\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi),$$

$$M_y = mr^2(\dot{\theta}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi),$$

$$M_z = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta,$$

$$M^2 = m^2r^4(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta).$$

习题 3 在下列场中运动时动量 $\boldsymbol{P}$ 和角动量 $\boldsymbol{M}$ 的哪些分量守恒?

a. 无限大均匀平面场.

答案:

P_x, P_y, M_z(无限大平面为 xy 平面).

b. 无限长均匀圆柱场.

答案:

P_z, M_z(圆柱轴为 z 轴).

c. 无限长均匀棱柱场.

答案:

P_z(棱边平行于 z 轴).

d. 两个点场.

答案:

M_z(两个点位于 z 轴上).

e. 无限大均匀半平面场.

答案:

P_y(无限大半平面是 xy 平面上以 y 轴为界的).

f. 均匀圆锥场.

答案:

M_z(圆锥轴为 z 轴).

g. 均匀圆环场.

答案:

M_z(圆环轴为 z 轴).

h. 无限长均匀圆柱形螺旋线场.

解: 绕螺旋轴(z 轴)旋转 $\delta\varphi$ 同时沿着该轴平移 $\frac{h}{2\pi}\delta\varphi$($h$ 为螺距),拉格朗日函数不改变. 所以有

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial \varphi}\delta\varphi = \left(\dot{P}_z\frac{h}{2\pi} + \dot{M}_z\right)\delta\varphi = 0,$$

由此可得

$$P_z \frac{h}{2\pi} + M_z = \text{const}.$$

§10　力学相似性

拉格朗日函数乘以任意常数不会改变运动方程(参见§2).在一些重要情况下,利用这一点,无需实际求解运动方程就可以得到有关运动性质的一些有用的结论.

这些情况包括那些势能是坐标的齐次函数的情况,即势能函数满足条件

$$U(\alpha \boldsymbol{r}_1, \alpha \boldsymbol{r}_2, \cdots, \alpha \boldsymbol{r}_n) = \alpha^k U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n), \tag{10.1}$$

其中 α 是任意常数,k 是函数的齐次次数.

我们引入变换,使坐标都变为 α 倍,时间变为 β 倍:

$$\boldsymbol{r}_a \to \alpha \boldsymbol{r}_a, \quad t \to \beta t.$$

这时所有速度 $\boldsymbol{v}_a = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_a/\mathrm{d}t$ 变为 α/β 倍,动能变为 α^2/β^2 倍,势能变为 α^k 倍.如果 α 和 β 满足条件

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k,$$

即

$$\beta = \alpha^{1-k/2},$$

则变换的结果是拉格朗日函数乘以常数 α^k,运动方程保持不变.

所有质点的坐标改变相同的倍数,意味着变换前后的运动轨迹几何上相似,仅仅是尺寸不同.于是我们可以得出结论,如果系统的势能是(笛卡儿)坐标的 k 次齐次函数,则由运动方程可以得到一系列几何上相似的不同轨迹,并且(不同轨迹上的相应点的)运动时间之比满足关系式

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-k/2}, \tag{10.2}$$

其中 l'/l 是两个轨迹线度之比.除了时间以外,在相应时刻不同运动轨迹上相应点的任何力学量之比是 l'/l 的幂,例如对于速度、能量和角动量有

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k/2}, \quad \frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k}, \quad \frac{M'}{M} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+k/2}, \tag{10.3}$$

下面就前面所讲的举几个例子.

我们在后面章节中将会讲到,在微振动情况下势能是坐标的二次函数($k=2$).由(10.2)可知这种振动的周期与振幅无关.

在均匀力场中势能是坐标的线性函数(参见(5.8)),即 $k=1$.由(10.2)得

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{l'}{l}}.$$

例如,由此可知,对于重力场中的自由落体,下落时间的平方之比等于初始高度

之比.

对于两个质点之间的牛顿引力或者两个电荷之间的库仑力,势能都是与两点间距离成反比,即势能是 $k=-1$ 的齐次函数.这时

$$\frac{t'}{t}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2},$$

例如,由此可得出结论:轨道运动周期的平方与轨道尺寸的立方成正比(这个结论称为*开普勒第三定律*).

如果力学系统在有限空间中运动,势能是坐标的齐次函数,则动能和势能的时间平均值之间存在非常简单的关系,这个关系式称为*位力定理*.

因为动能是速度的二次函数,根据欧拉齐次函数定理有

$$\sum_a \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{v}_a}\cdot \boldsymbol{v}_a = 2T,$$

或者利用$\partial T/\partial \boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{p}_a$ 写成

$$2T = \sum_a \boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{v}_a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_a \boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{r}_a - \sum_a \dot{\boldsymbol{p}}_a\cdot\boldsymbol{r}_a. \tag{10.4}$$

我们将上面这个等式对时间平均.函数 $f(t)$对时间平均定义为

$$\bar{f} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)\mathrm{d}t.$$

容易看出,如果函数 $f(t)$是某个有界函数 $F(t)$对时间的全导数,则 $f(t)$对时间平均等于零.事实上,

$$\bar{f} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \lim_{\tau\to\infty}\frac{F(\tau)-F(0)}{\tau} = 0.$$

假设系统在有限空间中以有限速度运动,则 $\sum_a \boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{r}_a$ 是有界的,等式(10.4)右端第一项对时间平均等于零.根据牛顿方程(5.3),将等式(10.4)右端第二项中 $\dot{\boldsymbol{p}}_a$ 替换为$-\partial U/\partial \boldsymbol{r}_a$,可得①

$$2\overline{T} = \sum_a \overline{\boldsymbol{r}_a\cdot\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}}. \tag{10.5}$$

如果势能是所有径矢 $\boldsymbol{r}_a$ 的 k 次齐次函数,则根据欧拉定理,等式(10.5)变为所要求的关系

$$2\overline{T} = k\,\overline{U}. \tag{10.6}$$

由于 $\overline{T}+\overline{U}=\overline{E}=E$,可以将等式(10.6)等价地写成

$$\overline{U}=\frac{2}{k+2}E,\qquad \overline{T}=\frac{k}{k+2}E, \tag{10.7}$$

这两个公式将 $\overline{U}$ 和 $\overline{T}$ 用系统的总能量表示出来.

---

① 等式(10.5)右端表达式有时也称为系统的位力.

对于 $k=2$,即微振动的特殊情况有

$$\overline{T}=\overline{U},$$

即动能和势能对时间平均相等.对于牛顿引力($k=-1$)有

$$2\overline{T}=-\overline{U}.$$

这时 $E=-\overline{T}$ 表明,只有在总能量为负值的情况下,在牛顿引力作用下,运动才是有界的(参见 § 15).

习　　题

习题 1　质量不同势能相同的质点沿着相同轨道运动,它们的运动时间满足什么关系?

答案:

$$\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{m'}{m}}.$$

习题 2　质点有相同的质量但势能相差一个常数因子,试求沿着相同轨道运动的时间之比?

答案:

$$\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{U}{U'}}.$$

第三章

运动方程的积分

§11 一维运动

一个自由度系统的运动称为一维运动.若系统处于定常外部条件下,拉格朗日函数的一般形式为

$$L=\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2-U(q),\tag{11.1}$$

其中 $a(q)$是广义坐标 q 的函数.特别地,如果 q 为笛卡儿坐标(我们就取为 x),则

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-U(x).\tag{11.2}$$

相应于这些拉格朗日函数的运动方程可以在一般形式下积分.这时甚至没必要给出运动方程本身,可以直接由运动方程的第一积分——能量守恒定律给出.于是,对于拉格朗日函数(11.2)有

$$\frac{m\dot{x}^2}{2}+U(x)=E.$$

这是一阶微分方程,可以通过分离变量积分出来:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]},$$

进而得到

$$t=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-U(x)}}+\text{const}.\tag{11.3}$$

这里总能量 E 和积分常数 const 表示运动方程解里的两个任意常数.

由于动能实际上是正值,运动中总能量总是大于势能,即运动只能发生在 $U(x)<E$ 的空间区域.

例如,假设函数 $U(x)$的形式如图 6 所示.在图中画出相应于给定总能量的水平直线,立即可以得到可能的运动区域,即图 6 中 AB 之间和 C 右侧的区域.

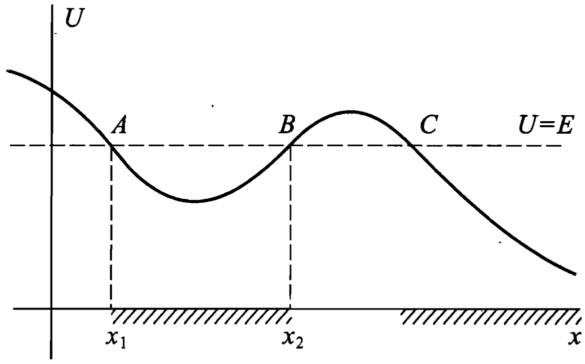


图 6

势能等于总能量的点确定了运动边界:

$$U(x)=E. \tag{11.4}$$

由于在这些点速度为零,故称之为*转折点*.如果运动区域由两个转折点限定,则运动发生在空间的有限区域内,称为*有界运动*.如果运动区域不受限制或者只有单侧限制,则运动是无限的,质点可以运动到无穷远处,称为*无界运动*.

一维有界运动是*振动*,质点在两个边界之间往复运动(在图 6 的点 x_1 和 x_2 之间的势阱 AB 中).根据时间的可逆性(参见 § 5),从 x_1 到 x_2 的运动时间等于从 x_2 到 x_1 的时间.所以,振动周期(从 x_1 运动到 x_2 并返回的时间)等于从 x_1 到 x_2 运动时间的两倍,根据(11.3)有

$$T(E)=\sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E-U(x)}}, \tag{11.5}$$

积分上下限 x_1 和 x_2 是 E 给定时方程(11.4)的根.这个公式给出了振动周期对质点的总能量的依赖关系.

习　题

习题 1　试求平面单摆(质量为 m,摆长为 l,在重力场中运动)振动周期和振幅之间的函数关系.

解:单摆的能量为

$$E=\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}-mgl\cos\varphi=-mgl\cos\varphi_0,$$

其中 φ 为绳与竖直方向夹角,φ_0 是最大摆角.周期等于 φ 从零到 φ_0 运动时间

的 4 倍：

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(\varphi/2)}}.$$

令 $\sin(\varphi/2)/\sin(\varphi_0/2) = \sin\xi$，上面的积分写成

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right),$$

其中

$$K(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\xi}}$$

称为第一类完全椭圆积分. 当 $\sin(\varphi_0/2) \approx \varphi_0/2 \ll 1$（微振动）时，展开函数 $K(k)$ 可得

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2 + \cdots\right).$$

这个展开式的第一项就是大家都知道的基本公式.

习题 2 试求质量为 m 的质点振动周期对能量的依赖关系，其中质点所处力场的势能为：

a. $U = A|x|^n$.

解：

$$T = 2\sqrt{2m}\int_0^{(E/A)^{1/n}}\frac{dx}{\sqrt{E - Ax^n}} = \frac{2\sqrt{2m}E^{1/n-1/2}}{A^{1/n}}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1 - y^n}}.$$

令 $y^n = u$，这个积分式化为用 Γ 函数表示的 B－欧拉积分，

$$T = \frac{2\sqrt{2\pi m}\,\Gamma(1/n)}{nA^{1/n}\Gamma(1/n + 1/2)}E^{1/n-1/2}.$$

T 和 E 的关系符合力学相似律(10.2)和(10.3).

b. $U = -U_0/\cosh^2\alpha x$, $\quad -U_0 < E < 0$.

答案：

$$T = \frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{|E|}}.$$

c. $U = U_0\tan^2\alpha x$.

答案：

$$T = \frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{E + U_0}}.$$

§ 12 根据振动周期确定势能

现在让我们来研究这样的问题，当一个质点在场中振动时，通过振动周期

T 与能量 E 的关系在多大程度上可以确定该场的势能 $U(x)$ 的形式. 从数学的角度看,这是求解积分方程(11.5),其中 $U(x)$ 是未知函数,而 $T(E)$ 是已知函数.

我们先不考虑积分方程是否存在不符合下述条件的解的问题,假定所求函数 $U(x)$ 在所考虑的空间区域中只有一个极小值. 为了方便起见,我们假设势能极小值等于零,并将坐标原点选在势能极小值处(图 7).

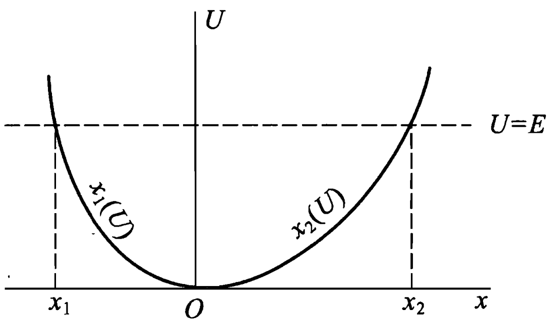


图 7

对积分(11.5)做变换,将坐标 x 当作 U 的函数. 函数 $x(U)$ 是双值的,即每个 U 对应两个不同的 x 值. 用 $\dfrac{dx}{dU}dU$ 代替 dx,积分(11.5)变为两个积分之和:从 $x=x_1$ 到 $x=0$ 的积分,从 $x=0$ 到 $x=x_2$ 的积分. 我们将这两个区域中的函数 $x(U)$ 分别写为 $x=x_1(U)$ 和 $x=x_2(U)$.

显然,对 U 积分的上下限分别为 E 和 0,于是有

$$\begin{aligned} T(E) &= \sqrt{2m}\int_0^E \frac{dx_2(U)}{dU}\frac{dU}{\sqrt{E-U}} + \sqrt{2m}\int_E^0 \frac{dx_1(U)}{dU}\frac{dU}{\sqrt{E-U}} \\ &= \sqrt{2m}\int_0^E \left(\frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU}\right)\frac{dU}{\sqrt{E-U}}. \end{aligned}$$

将这个方程两边除以 $\sqrt{\alpha-E}$,其中 α 是参数,然后对 E 从零到 α 积分:

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \sqrt{2m}\int_0^\alpha\int_0^E \left(\frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU}\right)\frac{dUdE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}},$$

或者改变积分顺序写成

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \sqrt{2m}\int_0^\alpha \left(\frac{dx_2(U)}{dU} - \frac{dx_1(U)}{dU}\right)dU\int_U^\alpha \frac{dE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}}.$$

对 E 的积分是初等积分,其值等于 π. 而对 U 的积分是平凡的,则有

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha-E}} = \pi\sqrt{2m}\left[x_2(\alpha) - x_1(\alpha)\right]$$

(计算中已考虑到 $x_2(0)=x_1(0)=0$). 将 α 替换为 U,最终得

$$x_2(U) - x_1(U) = \frac{1}{\pi\sqrt{2m}}\int_0^U \frac{T(E)\mathrm{d}E}{\sqrt{U-E}}. \tag{12.1}$$

因此,由已知的函数 $T(E)$可以确定 $x_2(U) - x_1(U)$,但函数 $x_2(U)$和 $x_1(U)$本身仍然无法确定.这就是说,相应于给定的周期与能量的关系,存在不止一条而是无穷多条曲线 $U = U(x)$,但是曲线的不同不改变同一 U 对应的两个 x 的差值.

如果要求曲线 $U = U(x)$关于 U 轴对称,即

$$x_2(U) = -x_1(U) \equiv x(U),$$

则不存在解的多值性问题.这时公式(12.1)给出 $U(x)$的单值表达式:

$$x(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}}\int_0^U \frac{T(E)\mathrm{d}E}{\sqrt{U-E}}. \tag{12.2}$$

§ 13 约化质量

由两个相互作用的质点组成的系统的运动,是非常重要的问题,称为二体问题,可以得到其运动的完全通解.

作为求解问题的第一步,我们将证明,通过把系统的运动分解为系统质心的运动和质点相对于质心的运动,则问题会大大简化.

相互作用的两个质点的势能仅依赖于它们之间的距离,即径矢差的大小.所以这样的系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2}{2} - U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|). \tag{13.1}$$

引入两质点相对位矢

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2,$$

并将坐标原点置于质心处,即

$$m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 = 0.$$

从这两个等式可以求出

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}. \tag{13.2}$$

将这些表达式代入(13.1)可得

$$L = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - U(r), \tag{13.3}$$

其中

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \tag{13.4}$$

称为约化质量.函数(13.3)形式上等同于在外场 $U(r)$中运动的一个质点的拉

格朗日函数,该质点的质量为 m,外场关于固定的坐标原点是对称的.

因此,二体问题等价于一个质量为 m 的质点在给定外场 $U(r)$中的运动.利用公式(13.2),两质点 m_1 和 m_2 的相对于它们共同质心的轨迹 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_1(t)$和 $\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_2(t)$可以由 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$分别求出来.

习 题

习题 质点系由一个质量为 M 的质点和 n 个质量同为 m 的质点组成.试消去质心运动并将该质点系的运动化为 n 体问题.

解: 设 $\boldsymbol{R}$ 是质点M 的径矢,$\boldsymbol{R}_a(a=1,2,\cdots,n)$分别是质量为 m 的各个质点的径矢.引入质点 M 到质点m 的相对位矢

$$\boldsymbol{r}_a=\boldsymbol{R}_a-\boldsymbol{R},$$

并将坐标原点置于质心处,即

$$M\boldsymbol{R}+m\sum_a\boldsymbol{R}_a=0.$$

从这两个等式可以求出

$$\boldsymbol{R}=-\frac{m}{\mu}\sum_a\boldsymbol{r}_a,\quad \boldsymbol{R}_a=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}_a,$$

其中 $\mu=M+nm$.将这些表达式代入拉格朗日函数

$$L=\frac{M\dot{\boldsymbol{R}}^2}{2}+\frac{m}{2}\sum_a\dot{\boldsymbol{R}}_a^2-U,$$

可得

$$L=\frac{m}{2}\sum_a\boldsymbol{v}_a^2-\frac{m^2}{2\mu}\left(\sum_a\boldsymbol{v}_a\right)^2-U,$$

其中 $\boldsymbol{v}_a\equiv\dot{\boldsymbol{r}}_a$.

势能仅取决于质点之间的相对位矢,可以写成是 $\boldsymbol{r}_a$ 的函数.

§14 有心力场内的运动

当将二体问题约化为一个单体运动问题时,我们仅需确定单个质点在某种外场中的运动,该外场中质点的势能只与质点到某一固定点的距离有关,这样的外场称为有心力场.作用在质点上的力

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\partial U(r)}{\partial\boldsymbol{r}}=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

的大小仅依赖于 r,方向总是沿着质点的径矢.

在§9 已经证明,在有心力场内的运动对场中心的角动量守恒.对于一个质点,这个角动量就是

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}.$$

由于 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 相互垂直,$\boldsymbol{M}$ 不变就意味着在运动过程中质点的径矢总是位于一个平面内,该平面垂直于 $\boldsymbol{M}$.

因此质点在有心力场内运动的整条轨道都位于一个平面内.在该平面内引入极坐标 r,φ,写出拉格朗日函数(参见(4.5))

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-U(r). \tag{14.1}$$

这个函数不显含坐标 φ.拉格朗日函数不显含的广义坐标称为*循环坐标*.根据拉格朗日方程,对于循环坐标 q_i,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,$$

即相应的广义动量 $p_i=\partial L/\partial \dot{q}_i$ 是运动积分.这将在存在循环坐标情况下大大简化积分运动方程的问题.

在现在的情况下,广义动量

$$p_\varphi=mr^2\dot{\varphi}$$

就是角动量 $M_z=M$(参见(9.8)),因此我们又回到了熟知的角动量守恒定律

$$M=mr^2\dot{\varphi}=\text{const}. \tag{14.2}$$

对于单一质点在有心力场内作平面运动的情况,角动量守恒定律有一个简单的几何解释.无限邻近的两个径矢和轨道微元围成的扇形面积(图 8)等于 $(1/2)\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\mathrm{d}\varphi$,将它表示为 $\mathrm{d}f$.质点的角动量可以写成

$$M=2m\dot{f}, \tag{14.3}$$

其中 $\dot{f}$ 称为*掠面速度*.所以角动量守恒意味着掠面速度为常数,即在相等时间间隔内质点径矢扫过相同的面积(*开普勒第二定律*)[①].

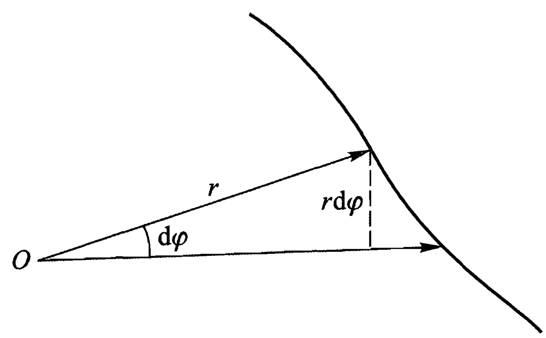


图 8

从能量和角动量守恒出发,无需写出运动方程,就可以很容易地完全解决质

① 在有心力场内运动质点角动量守恒定律有时也被称为*面积积分*.

点在有心力场中的运动问题.利用(14.2)用 M 表示$\dot{\varphi}$,代入能量的表达式,我们得到

$$E=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+U(r)=\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{M^2}{2mr^2}+U(r). \tag{14.4}$$

由此可得

$$\dot{r}\equiv\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)]-\frac{M^2}{m^2r^2}}, \tag{14.5}$$

分离变量并积分得

$$t=\int\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)]-\frac{M^2}{m^2r^2}}}+\text{const}. \tag{14.6}$$

将(14.2)写成

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{M}{mr^2}\mathrm{d}t,$$

从(14.5)求出 $\mathrm{d}t$ 代入上式并积分得

$$\varphi=\int\frac{(M/r^2)\mathrm{d}r}{\sqrt{2m[E-U(r)]-M^2/r^2}}+\text{const}. \tag{14.7}$$

公式(14.6)和(14.7)给出了问题的通解.公式(14.7)给出了 r 和 φ 的关系,即轨道方程,而公式(14.6)给出了质点到力心距离 r 随时间变化的隐函数.应该注意到,由公式(14.2)可知$\dot{\varphi}$的符号总不会改变,因此 φ 总是随时间单调变化.

公式(14.4)表明,径向运动可以看作是在某个场中的一维运动,该场的"有效"势能为

$$U_{\text{eff}}=U(r)+\frac{M^2}{2mr^2}. \tag{14.8}$$

其中 $M^2/(2mr^2)$称为离心势能.从

$$U(r)+\frac{M^2}{2mr^2}=E \tag{14.9}$$

中求出的 r 给出了运动区域边界到力心的距离.等式(14.9)成立时径向速度$\dot{r}$等于零.但这不能说明质点像在真正的一维运动中那样是静止的,这是因为角速度$\dot{\varphi}$不为零.等式$\dot{r}=0$ 表示轨道的"转折点",函数 $r(t)$在这个点从增加变为减小或者相反.

如果 r 的变化区域只受 $r\geqslant r_{\min}$的限制,则运动是无界的,即质点从无穷远处来又回到无穷远处去.

如果 r 的变化区域有两个边界 $r_{\min}$和 $r_{\max}$,则运动是有界的,轨道完全位于 $r=r_{\min}$和 $r=r_{\max}$确定的环形区域内.然而,这并不表明轨道必定是封闭曲线.

根据(14.7),在 r 从 r_{max} 变到 r_{min} 再回到 r_{max} 这一时间间隔内径矢转过的角度 $\Delta\varphi$ 等于

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{(M/r^2)\mathrm{d}r}{\sqrt{2m[E - U(r)] - M^2/r^2}}. \tag{14.10}$$

轨道封闭的条件是这个转角等于 2π 的有理数倍,即 $\Delta\varphi = 2\pi m/n$,其中 m,n 是整数.在这种情况下,经过 n 个运动周期,质点径矢转过 m 圈后,回到初始位置,即轨道封闭.

然而这是很特殊的情况,对于任意形式 $U(r)$,角 $\Delta\varphi$ 不等于 2π 的有理数倍.因此一般情况下作有界运动的质点的轨道不是封闭的.轨道无穷多次到达最大和最小距离,最终覆盖两个有界圆环之间的整个环形区域(图 9 所示轨道是一个例子).

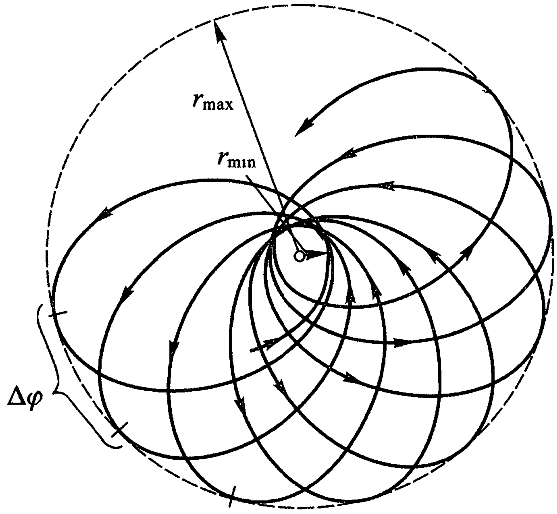


图 9

只有两种类型的有心力场,其中的一切有界运动的轨道是封闭的,这两种场的势能与 $\frac{1}{r}$ 或者 r^2 成正比.第一种将在 § 15 讨论,第二种相应于空间振子(参见 § 23 习题 3).

公式(14.5)(以及公式(14.6)和(14.7)的被积函数)中平方根在转折点改变符号.如果角 φ 从指向转折点的径矢方向算起,则轨道在该转折点两侧的每个部分,对同一 r 值,其区别仅在于 φ 的符号不同.就是说,轨道相对 $\varphi = 0$ 的线是对称的.比如,质点从某个 $r = r_{max}$ 点开始,经历一段轨道到达 $r = r_{min}$ 点,然后经历一段对称的轨道到达下一个 $r = r_{max}$ 点,依此类推,即整个轨道可以通过来回重复相同的轨道段得到.对于由两个从转折点 $r = r_{min}$ 到无穷远延伸对称分支组成的无界轨道也是如此.

当 $r\to 0$ 时,离心势能(对 $M\neq 0$ 的运动)像$\frac{1}{r^2}$一样趋向无穷大,因此质点通常不可能通过场的中心,即使场本身具有吸引特性也是如此.只有当 $r\to 0$ 时势能足够快速地趋向 $-\infty$,质点才可能"坠落"到场的中心.由不等式

$$\frac{m\dot{r}^2}{2}=E-U(r)-\frac{M^2}{2mr^2}>0$$

或者

$$r^2U(r)+\frac{M^2}{2m}<Er^2$$

可知,r 可能趋于零的条件是

$$r^2U(r)|_{r\to 0}<-\frac{M^2}{2m}, \tag{14.11}$$

即 $U(r)$应该或者像 $-\frac{\alpha}{r^2}\left(\alpha>\frac{M}{2m}\right)$,或者正比于 $-\frac{1}{r^n}(n>2)$这样的方式趋向 $-\infty$.

习 题

习题 1 试求解球面摆的运动方程.球面摆是指质量为 m 的质点沿着半径为 l 的球面在重力场中运动.

解:设球坐标系原点位于球心,极轴竖直向下,则质点的拉格朗日函数为

$$L=\frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+mgl\cos\theta.$$

显然 φ 是循环坐标,所以广义动量 p_φ,也就是角动量的 z 分量守恒:

$$ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta=M_z=\text{const}. \tag{1}$$

能量

$$E=\frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)-mgl\cos\theta=\frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2}+\frac{M_z^2}{2ml^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta. \tag{2}$$

由此求出 $\dot{\theta}$ 并分离变量,得

$$t=\int\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2}[E-U_{\text{eff}}(\theta)]}} \tag{3}$$

其中有效势能为

$$U_{\text{eff}}(\theta)=\frac{M_z^2}{2ml^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta.$$

对于角 φ,利用(1)求出

$$\varphi=\frac{M_z}{l\sqrt{2m}}\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{E-U_{\text{eff}}(\theta)}}. \tag{4}$$

积分(3)和(4)可分别化为第一类和第三类椭圆积分.

运动时角 θ 的变化范围由条件 $E > U_{\text{eff}}$ 确定,而其边界由方程 $E = U_{\text{eff}}$ 确定.这是 $\cos\theta$ 的三次方程,在 -1 和 $+1$ 之间有两个根,它们对应于球面上的两个纬线圈,整条轨道都位于这两个圈之间.

习题 2　在重力场中质点沿着圆锥表面运动,圆锥顶角为 2α,竖直放置,顶点向下.试求解该质点的运动方程.

解:设球坐标系原点位于圆锥顶点,极轴竖直向上,则拉格朗日函数为

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha) - mgr\cos\alpha.$$

显然 φ 是循环坐标,所以广义动量

$$M_z = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\alpha.$$

守恒.能量为

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha.$$

利用与习题 1 同样的方法求出

$$t = \int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{\text{eff}}(r)]}},$$

$$\varphi = \frac{M_z}{\sqrt{2m}\sin^2\alpha}\int \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}},$$

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha.$$

条件 $E = U_{\text{eff}}(r)$(当 $M_z \neq 0$ 时)是 r 的三次方程,有两个正根,它们确定锥面上的两个水平圆,整条轨道都处于这两个圆之间.

习题 3　试求解质量为 m_2 的平面摆的运动方程,摆的悬挂点质量为 m_1,可以沿着 m_2 运动的平面内的水平线运动(见图 2).

解:在§5 习题 2 中已求出拉格朗日函数。x 是循环坐标,所以广义动量 P_x 守恒,即系统总动量的水平分量守恒:

$$P_x = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi = \text{const}. \tag{1}$$

总可以认为系统整体静止,即 const = 0.对方程(1)积分可得

$$(m_1 + m_2)x + m_2 l\sin\varphi = \text{const}, \tag{2}$$

这表示系统质心在水平方向上静止.利用(1),能量可以写成

$$E = \frac{m_2 l^2\dot{\varphi}^2}{2}\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\cos^2\varphi\right) - m_2 gl\cos\varphi. \tag{3}$$

由此可得

$$t = l\sqrt{\frac{m_2}{2(m_1+m_2)}}\int\sqrt{\frac{m_1+m_2\sin^2\varphi}{E+m_2gl\cos\varphi}}\mathrm{d}\varphi.$$

利用(2),用 φ 表示 m_2 的坐标,$x_2=x+l\sin\varphi$,$y_2=l\cos\varphi$,由此可以求出这个质点的轨道.这是水平半轴为 $lm_1/(m_1+m_2)$ 竖直半轴为 l 的椭圆的一部分.当 $m_1\to\infty$ 时,就变为我们所熟悉的沿着一段圆弧运动的单摆.

§15　开普勒问题

势能与 r 成反比,因而力与 r^2 成反比的有心力场是非常重要的一类有心力场.牛顿万有引力场和库仑静电相互作用力场都属于这种情况,后者可能是吸引的也可能是排斥的力场.

我们首先研究引力场,设

$$U=-\alpha/r, \tag{15.1}$$

其中 α 是正数."有效"势能

$$U_{\text{eff}}=-\frac{\alpha}{r}+\frac{M^2}{2mr^2} \tag{15.2}$$

的曲线如图 10 所示,当 $r\to 0$ 时 U_{eff} 趋于 $+\infty$,当 $r\to\infty$ 时 U_{eff} 从负方向趋于零,当 $r=M^2/m\alpha$ 时取极小值

$$(U_{\text{eff}})_{\min}=-\frac{m\alpha^2}{2M^2}. \tag{15.3}$$

由曲线显而易见,当 $E>0$ 时质点运动是无界的,$E<0$ 时运动是有界的.

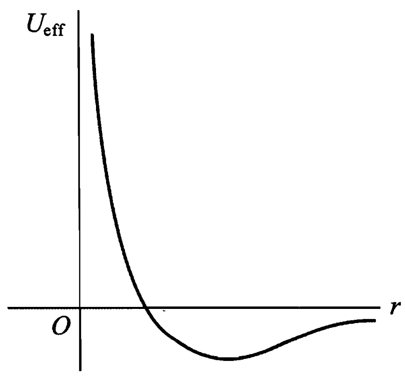


图 10

根据一般公式(14.7)可得轨道形状.代入 $U=-\alpha/r$ 并积分可得

$$\varphi=\arccos\frac{M/r-m\alpha/M}{\sqrt{2mE+m^2\alpha^2/M^2}}+\text{const}.$$

选择 φ 的起始位置使得 const = 0,并引入记号

$$p=\frac{M^2}{m\alpha},\quad e=\sqrt{1+\frac{2EM^2}{m\alpha^2}}, \tag{15.4}$$

轨道方程可以重新写成

$$p/r=1+e\cos\varphi. \tag{15.5}$$

这是焦点位于坐标原点的圆锥曲线方程,$2p$ 和 e 分别称为轨道的正焦弦和偏心率.由(15.5)可以看出,选择 φ 的起始位置,就是使 $\varphi=0$ 的点离中心最近(称该点为轨道近心点).

在按(15.1)相互作用的两个质点的等价问题中,每个质点的轨道都是圆锥曲线,其焦点之一位于两质点系统的质心处.

由(15.4)可知,当 $E<0$ 时 $e<1$,即轨道为椭圆(图 11),运动是有界的,和本节前面所说的结果一致.根据解析几何公式,椭圆的半长轴和半短轴为

$$a=\frac{p}{1-e^2}=\frac{\alpha}{2|E|},\quad b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \tag{15.6}$$

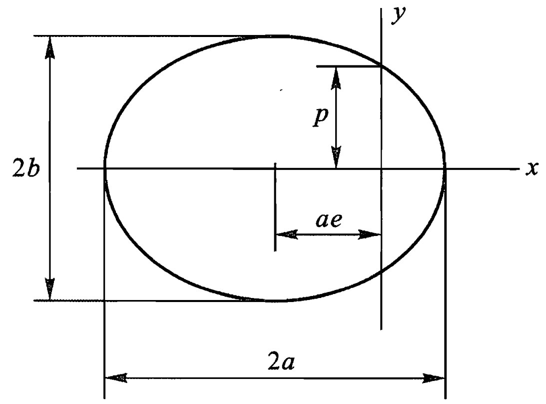


图 11

能量的最小可能值对应于(15.3),这时 $e=0$,即椭圆变成圆.需要指出,椭圆轨道的半长轴仅仅依赖于质点的能量(而与角动量无关),到场中心(椭圆焦点)的最小和最大距离等于

$$r_{\min}=\frac{p}{1+e}=a(1-e),\quad r_{\max}=\frac{p}{1-e}=a(1+e). \tag{15.7}$$

当然这两个表达式(a 由(15.6)确定,e 由(15.4)确定)也可以直接从方程 $U_{\text{eff}}=E$求根得到.

运用以面积积分形式(14.3)表示的角动量守恒定律,可以方便地求得质点沿椭圆轨道运动的周期 T.对时间从零到 T 积分这个等式,可得

$$2mf=TM,$$

其中 f 是轨道面积.对于椭圆 $f=\pi ab$,根据(15.6)得

$$T=2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}=\pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}. \tag{15.8}$$

在§10 已经指出,周期平方正比于轨道线度(半长轴)的立方.还需指出,周期仅仅依赖于质点的能量.

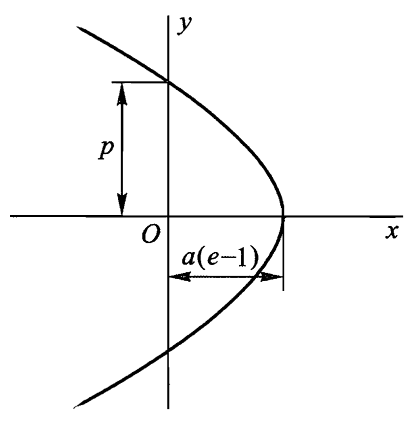


图 12

当 $E\geqslant0$ 时运动是无界的.如果 $E>0$ 则偏心率 $e>1$,即轨道是原点为内焦点的双曲线,如图 12 所示.近心点到中心的距离

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} = a(e-1), \tag{15.9}$$

其中

$$a = \frac{p}{e^2-1} = \frac{\alpha}{2E}$$

是双曲线的“半轴”.

在 $E=0$ 情况下偏心率 $e=1$,即质点沿着近心点距离为 $r_{\min}=p/2$ 的抛物线运动.如果质点自无穷远处从静止开始运动,就会出现这种情况.

质点沿着轨道运动时,坐标对时间的依赖关系可以利用(14.6)得到.它可以表示为下面所述的一种方便的参数形式.

首先研究椭圆轨道.根据(15.4)和(15.6)引入的 a 和 e,确定时间的积分(14.6)可以写成

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{-r^2+\dfrac{\alpha}{|E|}r-\dfrac{M^2}{2m|E|}}} = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}}\int\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}.$$

利用变换

$$r - a = -ae\cos\xi,$$

这个积分写成

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\int(1-e\cos\xi)\mathrm{d}\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi - e\sin\xi) + \text{const}.$$

选择时间起点使得 const = 0,最终可得 r 依赖于 t 的参数方程:

$$r = a(1-e\cos\xi), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi - e\sin\xi) \tag{15.10}$$

(在 $t=0$ 时刻质点位于近心点).用参数 ξ 还可以表示出质点的笛卡儿坐标 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$($x$ 轴和 y 轴分别沿着椭圆的半长轴和半短轴).由(15.5)和(15.10)有

$$ex = p - r = a(1-e^2) - a(1-e\cos\xi) = ae(\cos\xi - e),$$

再利用 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 求出 y.最终可得:

$$x = a(\cos\xi - e), \quad y = a\sqrt{1-e^2}\sin\xi. \tag{15.11}$$

沿着椭圆轨道运动一整圈对应着参数 ξ 从零到 2π.

对于双曲线轨道,完全类似地计算可得

$$r = a(e\cosh\xi - 1), \quad t = \sqrt{ma^3/\alpha}(e\sinh\xi - \xi),$$

$$x = a(e-\cosh\xi), \quad y = a\sqrt{e^2-1}\sinh\xi, \tag{15.12}$$

其中参数 ξ 取值范围从 $-\infty$ 到 $+\infty$.

下面研究相斥场中的运动，势能为

$$U=\frac{\alpha}{r} \tag{15.13}$$

($\alpha>0$). 这种情况下，有效势能为

$$U_{\text{eff}}=\frac{\alpha}{r}+\frac{M^2}{2mr^2}$$

当 r 从零到∞变化时，它从 $+\infty$ 单调减少到零. 质点能量只能是正的，运动总是无限的. 完全像上面对吸引场一样计算可知，轨道是双曲线

$$\frac{p}{r}=-1+e\cos\varphi \tag{15.14}$$

(p 和 e 由公式(15.4)确定)，轨道以图 13 所示的方式通过场的中心附近. 近心点距离为

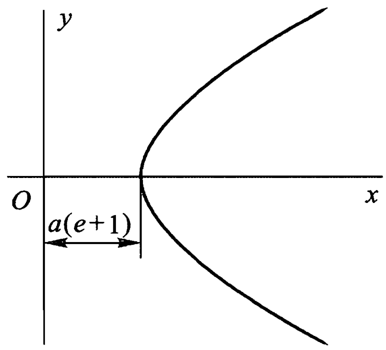


图 13

$$r_{\min}=\frac{p}{e-1}=a(e+1). \tag{15.15}$$

运动与时间的关系由参数方程给出：

$$r=a(e\cosh\xi+1),\quad t=\sqrt{ma^3/\alpha}\,(e\sinh\xi+\xi),$$
$$x=a(e+\cosh\xi),\quad y=a\sqrt{e^2-1}\sinh\xi. \tag{15.16}$$

在本节的最后我们来证明，仅在有心力场 $U=\alpha/r$（α 的符号任意）内的运动有其特有的运动积分. 很容易直接计算验证：

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{M}+\frac{\alpha\boldsymbol{r}}{r}=\text{const}. \tag{15.17}$$

事实上，上式对时间的全导数等于

$$\dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{M}+\frac{\alpha\boldsymbol{v}}{r}-\frac{\alpha\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r})}{r^3},$$

将 $\boldsymbol{M}=m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ 代入后得

$$m\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})-m\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})+\frac{\alpha\boldsymbol{v}}{r}-\frac{\alpha\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r})}{r^3}.$$

再根据运动方程 $m\dot{\boldsymbol{v}}=\alpha\boldsymbol{r}/r^3$ 可知上面表达式等于零.

守恒矢量(15.17)的方向沿着长轴从焦点指向近心点，其大小等于 αe. 这很容易通过计算该矢量在近心点的值来验证.

需要着重指出，运动积分(15.17)像 $\boldsymbol{M}$ 和 E 一样，是质点状态（位置和速度）的单值函数. 在 § 52 我们将看到，存在这个附加的单值积分是因为运动的简并性.

习　　题

习题 1　质点在场 $U=-\alpha/r$ 内沿着抛物线运动，能量 $E=0$，试求质点坐

标对时间的依赖关系.

解:对积分

$$t=\int\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m}r-\frac{M^2}{m^2}}}$$

做变换

$$r=\frac{M^2}{2m\alpha}(1+\eta^2)=\frac{p}{2}(1+\eta^2),$$

可得如下参数方程:

$$r=\frac{p}{2}(1+\eta^2),\quad t=\sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}}\ \frac{\eta}{2}\left(1+\frac{\eta^2}{3}\right),\quad x=\frac{p}{2}(1-\eta^2),\quad y=p\eta.$$

参数 η 取值范围为 $-\infty$ 到 $+\infty$.

习题 2　质点在有心力场 $U=-\frac{\alpha}{r^2}$,($\alpha>0$)内运动,试积分运动方程.

解:按照公式(14.6)和(14.7),对 φ 和 t 的计算起点做适当选择可得

a) 当 $E>0,\frac{M^2}{2m}>\alpha$ 时,

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2mE}{M^2-2m\alpha}}\cos\left(\varphi\sqrt{1-\frac{2m\alpha}{M^2}}\right),$$

b) 当 $E>0,\frac{M^2}{2m}<\alpha$ 时,

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha-M^2}}\sinh\left(\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2}-1}\right),$$

c) 当 $E<0,\frac{M^2}{2m}<\alpha$ 时,

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha-M^2}}\cosh\left(\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2}-1}\right).$$

在这三种情况下都有

$$t=\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{Er^2-\frac{M^2}{2m}+\alpha}.$$

在情况 b)和 c),当 $\varphi\to\infty$ 时,质点沿着趋向坐标原点的轨道"坠落"至中心.从给定的距离 r 开始的坠落时间等于

$$\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\left(\sqrt{\alpha-\frac{M^2}{2m}+Er^2}-\sqrt{\alpha-\frac{M^2}{2m}}\right).$$

习题 3　在势能 $U=-\alpha/r$ 上增加一个小的修正 δU,有限运动的轨道不再封闭,并且每运动一圈轨道的近心点都有很小的角度改变量 $\delta\varphi$.在下面情况下求 $\delta\varphi$:a)$\delta U=\beta/r^2$,b)$\delta U=\gamma/r^3$.

解：当 r 从 $r_{\min}$ 变到 $r_{\max}$ 再重新回到 $r_{\min}$ 时，角变化量 $\delta\varphi$ 由公式(14.10)给出. 为了避免虚假发散，将公式(14.10)改写成

$$\Delta\varphi = -2\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}\mathrm{d}r$$

代入 $U=-\alpha/r+\delta U$ 并将被积式按 δU 的幂次展开，其中，零阶项为 2π，一阶项就是所求的 $\delta\varphi$：

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{2m\delta U\mathrm{d}r}{\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{r^2}}} = \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{2m}{M}\int_0^{\pi}r^2\delta U\mathrm{d}\varphi\right), \tag{1}$$

其中对 r 的积分变为沿着“无扰”运动轨道对 φ 的积分.

对于情况 a)，公式(1)中的积分是平凡的，得

$$\delta\varphi = -\frac{2\pi\beta m}{M^2} = -\frac{2\pi\beta}{\alpha p}$$

其中 $2p$ 是(15.4)中无扰椭圆的正焦弦. 在情况 b)中 $r^2\delta U=\gamma/r$，由(15.5)给出的 $1/r$ 代入(1)后可得

$$\delta\varphi = -\frac{6\pi\alpha\gamma m^2}{M^4} = -\frac{6\pi\gamma}{\alpha p^2}.$$

第四章

质点碰撞

§ 16 质点分裂①

在许多情形下，利用动量守恒和能量守恒定律可以得到一系列关于各种力学过程特性的重要结果．应当注意的是，这些性质完全不依赖于质点间相互作用的具体形式．

首先，我们研究一个质点“自发”（即不是外力引起的）分裂成两个“组成部分”，即两个分裂后各自独立运动的其它质点的过程．

在质点（分裂前）静止的参考系中描述这个过程是最简单的．根据动量守恒定律，分裂后两个质点的动量之和仍为零，即两个质点以大小相等方向相反的动量相背运动．动量的大小（p_0）可以由能量守恒定律

$$E_{\text{int}} = E_{1\text{int}} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2\text{int}} + \frac{p_0^2}{2m_2}$$

确定，其中 m_1 和 m_2 是两个质点的质量，$E_{1\text{int}}$和 $E_{2\text{int}}$是它们的内能，而 E_{int}是原来（即将分裂的）质点的内能．用 ε 表示“分裂能”，即差值

$$\varepsilon = E_{\text{int}} - E_{1\text{int}} - E_{2\text{int}} \tag{16.1}$$

（显然，这个量应该是正的，这样分裂才可能发生）．这时有

$$\varepsilon = \frac{p_0^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{p_0^2}{2m}, \tag{16.2}$$

由此确定 p_0（m 是两个质点的约化质量），两个质点的速度分别为 $v_{10} = p_0/m_1$

① 这里以及本章后文中的“质点”译为“粒子”更准确一些，但为了与前面的章节统一起见，采用现译名．——译校者注

和 $v_{20}=p_0/m_2$.

下面我们换一个参考系,分裂前原来的质点以速度 $\boldsymbol{V}$ 相对该参考系运动.通常称这个参考系为实验室参考系,也叫 L 系,它不同于其中系统总动量等于零的质心参考系,也叫 C 系.设 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}_0$ 是分裂后其中一个质点分别相对实验室参考系和质心参考系的速度.显然,有 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{v}_0$ 或者 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}=\boldsymbol{v}_0$ 可得

$$v^2+V^2-2vV\cos\theta=v_0^2, \tag{16.3}$$

其中 θ 是质点相对速度 $\boldsymbol{V}$ 的方向飞出的角度.这个方程给出了在实验室参考系中分裂后质点速度对飞出方向的函数关系.

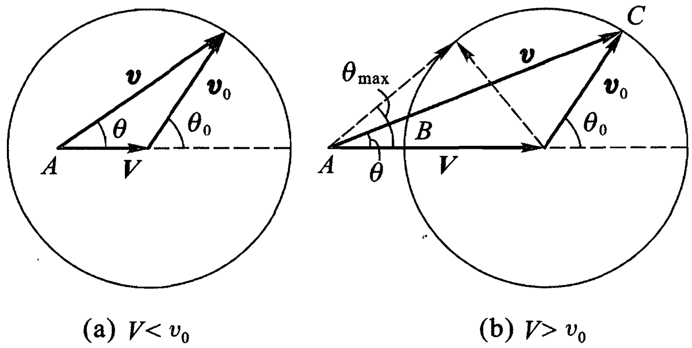


图 14

图 14 借助图解法示出了这个关系.点 A 距圆心的距离为 V,速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 由从 A 点指向半径为 v_0 的圆周上任一点的矢量表示①.图 14(a)和(b)分别相应于 $V<v_0$ 和 $V>v_0$ 的情况.第一种情况下质点可以任意角度 θ 飞出,第二种情况下质点只能向前飞出,飞出角度 θ 不超过下式给出的 $\theta_{\max}$,

$$\sin\theta_{\max}=\frac{v_0}{V} \tag{16.4}$$

(这是从 A 作圆的切线的方向).

在实验室参考系和质心参考系中飞出角 θ 和 θ_0 的关系,显然也可以由图解法给出:

$$\tan\theta=\frac{v_0\sin\theta_0}{v_0\cos\theta_0+V}. \tag{16.5}$$

如果解这个方程求 $\cos\theta_0$,则经过初等的变换可得

$$\cos\theta_0=-\frac{V}{v_0}\sin^2\theta\pm\cos\theta\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}. \tag{16.6}$$

由图 14(a)可以看出,当 $v_0>V$ 时 θ 和 θ_0 之间的关系是一一对应的.这时在公

① 确切地说是半径为 v_0 的球上任一点,图 14 上画的是该球的直径截面.

式(16.6)中根号前面取"+"号(使得 $\theta=0$ 时 $\theta_0=0$).如果 $v_0<V$,θ 和 θ_0 之间的关系不是一一对应的:每个 θ 对应两个 θ_0(图 14(b)),它们相应于从圆心指向 B 或者 C 的矢量$\boldsymbol{v}_0$,也对应于公式(16.6)中根号前两个符号.

在物理应用中通常要处理的不是一个,而是很多个相同质点的分裂,这就产生了分裂后的质点按方向、能量等分布的问题.这时我们假设,原始质点在空间中运动方向是随机的,即在平均意义下是各向同性的.

在质心参考系中这个问题是容易求解的:所有(相同类型的)分裂后的质点具有相同的能量,它们飞出方向分布是各向同性的,这与原始质点的运动方向是随机的假设相关.就是说,进入立体角微元 $\mathrm{d}O_0$ 的质点数所占的比例正比于该微元的大小,即等于 $\mathrm{d}O_0/4\pi$.代入 $\mathrm{d}O_0=2\pi\sin\theta_0\mathrm{d}\theta_0$ 后可得按角 θ_0 的分布:

$$\frac{1}{2}\sin\theta_0\mathrm{d}\theta_0. \tag{16.7}$$

在实验室参考系中的分布可以通过适当的变换得到.例如,我们来计算在实验室参考系中的动能分布.将等式$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{V}$ 平方得

$$v^2={v_0}^2+V^2+2v_0V\cos\theta_0,$$

由此有

$$\mathrm{d}\cos\theta_0=\frac{\mathrm{d}(v^2)}{2v_0V}.$$

利用动能 $T=mv^2/2$(其中 m 是 m_1 或者 m_2,取决于我们研究哪类分裂质点)并代入(16.7)即可得所要求的分布

$$\frac{\mathrm{d}T}{2mv_0V}. \tag{16.8}$$

动能的取值范围从最小值 $T_{\min}=(m/2)(v_0-V)^2$ 到最大值 $T_{\max}=(m/2)(v_0+V)^2$.在这个范围内质点按照(16.8)均匀分布.

在质点分裂成多于两个部分时,动量守恒和能量守恒定律自然允许分裂后的质点的速度和方向可以有更大的任意性.特别是,在质心参考系中这些分裂后的质点的能量不再具有确定的值,但是其中的每个质点的动能存在上限.

为了确定这个上限,除了一个给定质点(质量为 m_1),我们将所有其它质点看作一个系统,其内能用 E'_{int}表示.根据(16.1)和(16.2),质点 m_1 的动能等于

$$T_{10}=\frac{p_0^2}{2m_1}=\frac{M-m_1}{M}(E_{\mathrm{int}}-E_{1\mathrm{int}}-E'_{\mathrm{int}})$$

其中 M 是原始质点的质量.显然,当 E'_{int}最小时 T_{10}取最大值.为此,除了 m_1 以外所有其它分裂后的质点必须以相同的速度运动,那么 E'_{int}就是它们的内能之和,而差值 $E_{\mathrm{int}}-E_{1\mathrm{int}}-E'_{\mathrm{int}}$就是分裂能 ε.于是有

$$(T_{10})_{\max}=\frac{M-m_1}{M}\varepsilon. \tag{16.9}$$

习　题

习题 1　试求质点分裂后两个质点飞出角 θ_1 和 θ_2 之间的关系(在实验室参考系中).

解:在质心参考系中两个飞出角满足关系 $\theta_{10}=\pi-\theta_{20}$. 将 θ_{10} 简记为 θ_0,对每个分裂后的质点利用公式(16.5)可得

$$V+v_{10}\cos\theta_0=v_{10}\sin\theta_0\cot\theta_1,$$

$$V-v_{20}\cos\theta_0=v_{20}\sin\theta_0\cot\theta_2.$$

应该从这两个等式中消去 θ_0. 为此,首先从中求出 $\sin\theta_0$ 和 $\cos\theta_0$,然后代入 $\cos^2\theta_0+\sin^2\theta_0=1$. 再考虑到 $v_{10}/v_{20}=m_2/m_1$,利用公式(16.2)可得

$$\frac{m_2}{m_1}\sin^2\theta_2+\frac{m_1}{m_2}\sin^2\theta_1-2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\theta_1+\theta_2)=\frac{2\varepsilon}{(m_1+m_2)V^2}\sin^2(\theta_1+\theta_2).$$

习题 2　试求实验室参考系中分裂后的质点的飞出方向分布.

解:当 $v_0>V$ 时将(16.6)代入(16.7),其中根号前面取正号,可得

$$\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{2}\left[2\frac{V}{v_0}\cos\theta+\frac{1+(V^2/v_0^2)\cos2\theta}{\sqrt{1-(V^2/v_0^2)\sin^2\theta}}\right]\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi).$$

当 $v_0<V$ 时,应该考虑 θ 和 θ_0 的两种可能关系. 当 θ 增大时,与之对应的两个 θ_0 中有一个也增大,另一个则减小,因此应该取(16.6)中根号前两个符号对应表达式之差(而不是和),来计算 $\mathrm{d}\cos\theta_0$. 最后得

$$\sin\theta\mathrm{d}\theta\,\frac{1+(V^2/v_0^2)\cos2\theta}{\sqrt{1-(V^2/v_0^2)\sin^2\theta}}\quad(0\leqslant\theta\leqslant\theta_{\max}).$$

习题 3　试求在实验室参考系中两个分裂后的质点飞出方向之间夹角 θ 的取值范围.

解:角 θ 是 θ_1 与 θ_2 之和,角 θ_1 和 θ_2 由公式(16.5)确定(参见习题 1). 最简单的是计算 $\tan\theta$. 研究所得表达式的极值可以给出 θ 的可能取值范围,这依赖于 V,v_{10},v_{20} 的相对大小(为了确定起见,我们假设 $v_{20}>v_{10}$):

如果 $v_{10}<V<v_{20}$,则 $0<\theta<\pi$,

如果 $V<v_{10}$,则 $\pi-\theta_m<\theta<\pi$,

如果 $V>v_{20}$,则 $0<\theta<\theta_m$,其中 θ_m 之值由下式给出

$$\sin\theta_m=\frac{V(v_{10}+v_{20})}{V^2+v_{10}v_{20}}.$$

§ 17　质点弹性碰撞

如果两个质点碰撞不改变它们的内部状态,则称为弹性碰撞. 因此,对于这

样的碰撞应用能量守恒定律时可以不考虑质点的内能.

在两个质点的质心静止的参考系(即 C 系)中研究碰撞最简单.像上节一样,我们用下标 0 表示物理量在这个参考系中的值.碰撞前两个质点在质心参考系中的速度与实验室参考系中的速度 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 的关系为

$$\boldsymbol{v}_{10}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}\ ,\quad \boldsymbol{v}_{20}=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}\ ,$$

其中 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$ (参见(13.2)).

根据动量守恒定律,碰撞后两个质点动量的大小相等方向相反,又根据能量守恒定律,它们的绝对值也不变.于是,在质心参考系中碰撞的结果仅是转动了两个质点的速度,而这些速度的方向保持相反,大小不变.如果用 $\boldsymbol{n}_0$ 表示沿碰撞后质点 m_1 的速度方向的单位矢量,则两个质点碰撞后的速度(用撇号区别)为

$$\boldsymbol{v}'_{10}=\frac{m_2}{m_1+m_2}v\boldsymbol{n}_0,\quad \boldsymbol{v}'_{20}=-\frac{m_1}{m_1+m_2}v\boldsymbol{n}_0. \tag{17.1}$$

为了变换到实验室参考系,需要在这些表达式中加上质心速度 $\boldsymbol{V}$.于是,两个质点在实验室参考系中的碰撞后速度为

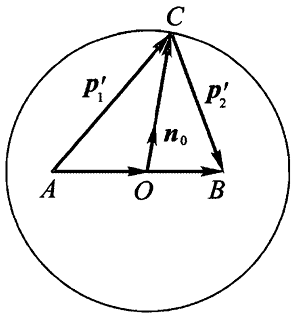
$$\boldsymbol{v}'_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}v\boldsymbol{n}_0+\frac{m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1+m_2},\quad \boldsymbol{v}'_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}v\boldsymbol{n}_0+\frac{m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1+m_2}. \tag{17.2}$$

利用动量和能量守恒定律只能得到这些关于碰撞的结论.矢量 $\boldsymbol{n}_0$ 的方向与质点之间相互作用规律以及碰撞时它们的相对位置有关.

对于上述结果可以给出几何解释,为此将速度换为动量会更加方便.将等式(17.2)分别乘以 m_1 和 m_2 可得

$$\boldsymbol{p}'_1=mv\boldsymbol{n}_0+\frac{m_1}{m_1+m_2}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2),\quad \boldsymbol{p}'_2=-mv\boldsymbol{n}_0+\frac{m_2}{m_1+m_2}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2). \tag{17.3}$$

($m=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$是约化质量).作半径为 mv 的圆,并使用示于图 15 中的构造.如果单位矢量 $\boldsymbol{n}_0$ 沿着 $\overrightarrow{OC}$,则矢量 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{CB}$ 分别给出动量 $\boldsymbol{p}'_1$ 和 $\boldsymbol{p}'_2$.在给定 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 时,圆的半径确定,A 和 B 点的位置也确定,而 C 点可以位于圆周上任何位置.

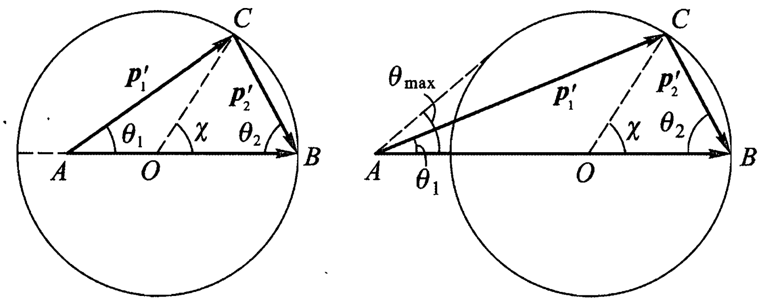


$$\overrightarrow{OC} = m\boldsymbol{v},$$
$$\overrightarrow{AO} = \frac{m_1(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)}{m_1 + m_2},$$
$$\overrightarrow{OB} = \frac{m_2(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2)}{m_1 + m_2}.$$

图 15

我们更详细地考虑碰撞前有一个质点(设为 m_2)静止的情况.这种情况下 $OB = \frac{m_2}{m_1 + m_2}p_1 = mv$ 的长度与半径相等,即 B 点在圆周上.矢量 $\overrightarrow{AB}$ 等于碰撞前第一个质点 m_1 的动量 $\boldsymbol{p}_1$.点 A 位于圆内(当 $m_1 < m_2$ 时)或者圆外(当 $m_1 > m_2$ 时).相应的情况如图 16(a)和(b)所示.图中的 θ_1 和 θ_2 是碰撞后质点运动方向偏离撞击方向($\boldsymbol{p}_1$ 方向)的角度.图中用 χ 表示的圆心角(它给出 $\boldsymbol{n}_0$ 的方向)是第一个质点 m_1 在质心参考系中的偏转角.由图中可见,角 θ_1 和 θ_2 可以用 χ 表示出来

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2\sin\chi}{m_1 + m_2\cos\chi}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}. \tag{17.4}$$



(a) $m_1 < m_2$ (b) $m_1 > m_2$

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{p}_1,$$
$$AO/OB = m_1/m_2.$$

图 16

我们还可以用 χ 写出碰撞后两个质点的速度的大小的表示式:

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos\chi}}{m_1 + m_2}v, \quad v_2' = \frac{2m_1v}{m_1 + m_2}\sin\frac{\chi}{2}. \tag{17.5}$$

$\theta_1+\theta_2$ 是碰撞后质点飞出方向之间的夹角. 显然, 当 $m_1<m_2$ 时 $\theta_1+\theta_2>\pi/2$, 当 $m_1>m_2$ 时 $\theta_1+\theta_2<\pi/2$.

当碰撞后两个质点沿着一条直线运动(正碰)时, 相应有 $\chi=\pi$, 即 C 点或者位于过 A 点的直径上并在 A 点左边(图 16(a), 这时 $\boldsymbol{p}_1'$ 和 $\boldsymbol{p}_2'$ 相互反向), 或者位于 A 和 O 之间(图 16(b), 这时 $\boldsymbol{p}_1'$ 和 $\boldsymbol{p}_2'$ 的方向相同).

这种情况下碰撞后质点速度等于

$$\boldsymbol{v}_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v}_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}. \tag{17.6}$$

这时 $\boldsymbol{v}_2'$ 取最大可能值, 因此原来静止的质点碰撞后获得的最大能量等于

$$E_{2\max}'=\frac{m_2 v_{2\max}'^2}{2}=\frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}E_1, \tag{17.7}$$

其中 $E_1=\dfrac{m_1v_1^2}{2}$ 是原来运动质点的初始能量.

当 $m_1<m_2$ 时, 碰撞后第一个质点的速度可以沿着任意方向. 然而, 如果 $m_1>m_2$, 则该质点偏离原来方向的偏角不能超过某个最大值 $\theta_{1\max}$, 这个 θ_1 的最大值所对应的 C 点位置是 AC 与圆相切(图 16(b)). 显然, $\sin\theta_{1\max}\doteq OC/OA$, 或者

$$\sin\theta_{1\max}=\frac{m_2}{m_1}. \tag{17.8}$$

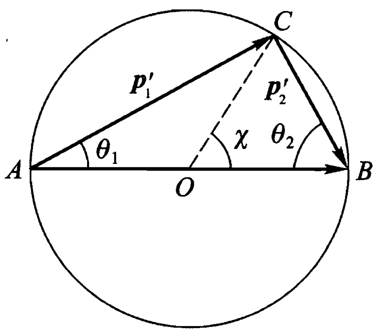


图 17

两个质量相同的质点(一个初始静止)的碰撞特别简单. 这种情况下 A 点和 B 点都位于圆周上(图 17). 这时有

$$\theta_1=\frac{\chi}{2}, \quad \theta_2=\frac{\pi-\chi}{2}, \tag{17.9}$$

$$v_1'=v\cos\frac{\chi}{2}, \quad v_2'=v\sin\frac{\chi}{2}. \tag{17.10}$$

可见, 碰撞后两个质点飞出方向相互垂直.

习　题

习题　运动质点 m_1 和静止质点 m_2 发生碰撞, 试用实验室参考系中的偏角表示两个质点碰撞后速度.

解: 由图 16 有 $p_2'=2OB\cos\theta_2$ 或者 $v_2'=2v\dfrac{m}{m_2}\cos\theta_2$. 对于动量 $p_1'=AC$ 有方程

$$OC^2=AO^2+p_1'^2-2AO\cdot p_1'\cos\theta_1$$

或者

$$\left(\frac{v_1'}{v}\right)^2-\frac{2m}{m_2}\frac{v_1'}{v}\cos\theta_1+\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}=0.$$

由此得

$$\frac{v_1'}{v}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\cos\theta_1\pm\frac{1}{m_1+m_2}\sqrt{m_2^2-m_1^2\sin^2\theta_1}$$

(当 $m_1>m_2$ 时根号前两个符号均可,当 $m_2>m_1$ 时根号前只能取正号).

§18 质点散射

上一节已经指出,要完全确定两个质点的碰撞结果(即确定偏转角 χ),必须求解计及质点相互作用具体规律的运动方程.

首先,我们按照一般法则来研究一个等效的问题,这是一个质量为 m 的质点在中心(位于原来问题中两粒子的质心)静止的力场 $U(r)$中的偏转问题.

在§14 已经指出,质点在有心力场中的轨道,相对于过中心和轨道近心点的直线(图 18 上的 OA)对称.所以,轨道的两条渐近线与该直线的夹角相同.如果记该角为 φ_0,则由图 18 可见,质点飞过中心附近产生的偏转角 χ 等于

$$\chi=|\pi-2\varphi_0|. \tag{18.1}$$

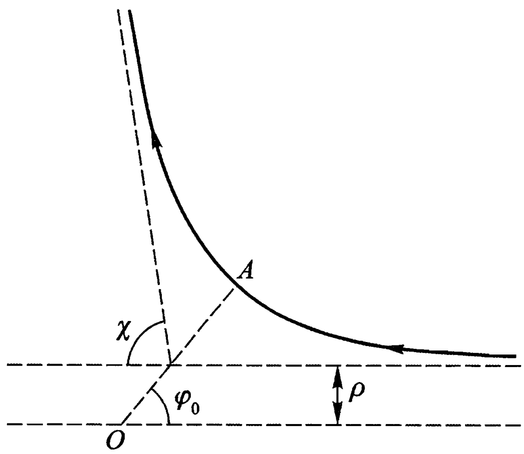


图 18

根据(14.7),确定 φ_0 的积分是从轨道近心点到无穷远:

$$\varphi_0=\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{(M/r^2)\mathrm{d}r}{\sqrt{2m[E-U(r)]-M^2/r^2}}. \tag{18.2}$$

需要注意,$r_{\min}$是上式根号内表达式的根.

在这里所讨论的无界运动情况下,引入质点在无穷远处速度 v_∞和瞄准距离 ρ 来代替常数E 和 M 更为方便.瞄准距离是指中心到 v_∞的方向的垂直距离,即不存在力场情况下质点飞过中心时的距离(图 18).用这些量,能量和角动量可表示为

$$E=\frac{mv_{\infty}^{2}}{2},\quad M=m\rho v_{\infty},\tag{18.3}$$

而公式(18.2)变为

$$\varphi_{0}=\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{(\rho/r^{2})\mathrm{d}r}{\sqrt{1-\rho^{2}/r^{2}-2U/mv_{\infty}^{2}}}.\tag{18.4}$$

由方程(18.1)和(18.4)可以求出 χ 对 ρ 的函数的表达式.

在物理应用中经常遇到的不是一个质点的偏转问题,而是以相同速度 $\boldsymbol{v}_{\infty}$ 飞过散射中心的全同质点束的散射.束中不同的质点有不同的瞄准距离,因此以不同的角度 χ 散射.我们用 $\mathrm{d}N$ 表示单位时间内偏转角在 χ 和 $\chi+\mathrm{d}\chi$ 之间的散射质点数.因为这个数正比于入射质点束的密度,它对于刻画散射过程并不方便.所以我们引入比值

$$\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}N/n,\tag{18.5}$$

其中 n 是单位时间内通过质点束单位横截面积上的质点数(当然,我们假设质点束在横截面上是均匀的).这个量具有面积量纲,称为*有效散射截面*.它完全由散射场的形式决定,是描述散射过程最重要的参量.

我们将假定 χ 和 ρ 之间的关系是一一对应的.如果散射角是瞄准距离的单调递减函数,两者之间的关系就是如此。这种情况下,只有瞄准距离在 $\rho(\chi)$ 和 $\rho(\chi)+\mathrm{d}\rho(\chi)$ 之间的那些质点被散射到 χ 和 $\chi+\mathrm{d}\chi$ 之间.这样的质点数等于 n 乘以内外径为 ρ 和 $\rho+\mathrm{d}\rho$ 圆环的面积,即 $\mathrm{d}N=2\pi\rho\mathrm{d}\rho\cdot n$.由此可得有效截面

$$\mathrm{d}\sigma=2\pi\rho\mathrm{d}\rho.\tag{18.6}$$

为了求得有效截面 $\mathrm{d}\sigma$ 对散射角的依赖关系,将上式改写成

$$\mathrm{d}\sigma=2\pi\rho(\chi)\left|\frac{\mathrm{d}\rho(\chi)}{\mathrm{d}\chi}\right|\mathrm{d}\chi.\tag{18.7}$$

这里我们加上绝对值符号是因为 $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}\chi$ 可能(通常就是)取负值①.通常 $\mathrm{d}\sigma$ 不是对应平面角微元 $\mathrm{d}\chi$,而是立体角微元 $\mathrm{d}o$.在对顶角为 χ 和 $\chi+\mathrm{d}\chi$ 的两圆锥体之间的立体角微元为 $\mathrm{d}o=2\pi\sin\chi\mathrm{d}\chi$.因此,由(18.7)有

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\chi}\right|\mathrm{d}o.\tag{18.8}$$

回到质点束不是被力心固定的力场,而是被初始静止的其它质点所散射的实际问题时,我们可以说公式(18.7)给出了质心参考系中有效截面对散射角的依赖关系.为了得到实验室参考系中有效截面对散射角 θ 的依赖关系,需要用公式 (17.4),将(18.7)中的 χ 用 θ 表示出来.这样可以得到入射质点束散射截

① 如果函数 $\rho(\chi)$ 是多值的,则显然需要对该函数的各个分支求如(18.7)那样的表达式的和.

面的表达式(用 θ_1 表示的 χ)和初始静止质点的散射截面的表达式(用 θ_2 表示的 χ).

习 题

习题 1 试求质点在半径为 a 的刚性球上散射的有效截面(即作用规律是当 $r<a$ 时 $U=\infty$,当 $r>a$ 时 $U=0$).

解:质点在球外自由运动,又不可能进入球内,因此质点的轨道由两条直线组成,这两条直线相对于过质点与球撞击点的半径对称(图 19).由图可见,

$$\rho = a\sin\varphi_0 = a\sin\frac{\pi-\chi}{2} = a\cos\frac{\chi}{2}.$$

代入公式(18.7)或(18.8)可得

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\pi a^2}{2}\sin\chi\,\mathrm{d}\chi = \frac{a^2}{4}\mathrm{d}o, \tag{1}$$

即在质心参考系中散射各向同性.对所有角度积分 $\mathrm{d}\sigma$ 可得总截面 $\sigma=\pi a^2$,这与“瞄准面积”就是球面的截面面积的事实一致.瞄准面积即是质点要被散射必须击中的面积.

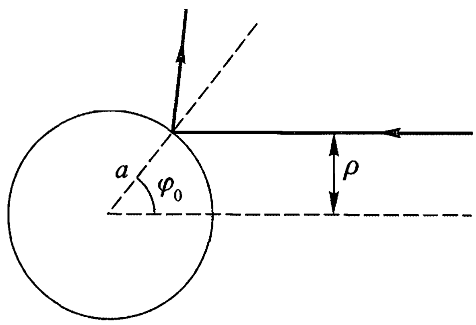


图 19

为了转换到实验室参考系中,要根据(17.4)用 θ_1 表示 χ.计算完全与§16 习题 2 类似,因为(17.4)与(16.5)在形式上是相似的.当 $m_1<m_2$ 时(m_1 是质点的质量,m_2 是球的质量),可得

$$\mathrm{d}\sigma_1 = \frac{a^2}{4}\left[2\frac{m_1}{m_2}\cos\theta_1 + \frac{1+(m_1^2/m_2^2)\cos2\theta_1}{\sqrt{1-(m_1^2/m_2^2)\sin^2\theta_1}}\right]\mathrm{d}o_1$$

($\mathrm{d}o_1 = 2\pi\sin\theta_1\mathrm{d}\theta_1$).如果 $m_2<m_1$,则

$$\mathrm{d}\sigma_1 = \frac{a^2}{2}\,\frac{1+(m_1^2/m_2^2)\cos2\theta_1}{\sqrt{1-(m_1^2/m_2^2)\sin^2\theta_1}}\mathrm{d}o_1.$$

当 $m_1=m_2$ 时,有

$$\mathrm{d}\sigma_1 = a^2|\cos\theta_1|\,\mathrm{d}o_1,$$

这也可以直接将(17.9)中的关系 $\chi=2\theta_1$ 代入(1)得到.

对于初始静止的球总是有 $\chi=\pi-2\theta_2$,代入(1)可得

$$d\sigma_2=a^2|\cos\theta_2|do_2.$$

习题 2 在习题1同样情况下,试将有效截面表示为散射质点损失能量 ε 的函数.

解:质点 m_1 损失的能量等于球 m_2 获得的能量.根据(17.5)和(17.7)有

$$\varepsilon=E_2'=\frac{2m_1^2m_2}{(m_1+m_2)^2}v_\infty^2\sin^2\frac{\chi}{2}=\varepsilon_{\max}\sin^2\frac{\chi}{2},$$

由此可得

$$d\varepsilon=\frac{1}{2}\varepsilon_{\max}\sin\chi d\chi,$$

再代入习题 1 的(1)可得

$$d\sigma=\pi a^2\frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{\max}}.$$

在 ε 从零到 $\varepsilon_{\max}$ 区间内散射质点的分布是均匀的.

习题 3 在场 $U\sim r^{-n}$ 内散射的质点,其有效截面对速度 v_∞ 依赖关系是什么?

解:根据(10.3),如果势能是 $k=-n$ 阶齐次函数,则对于相似的轨道,$\rho\sim v^{-2/n}$ 或者

$$\rho=v_\infty^{-2/n}f(\chi)$$

(对于相似的轨道,偏转角 χ 都相同).代入(18.6)得

$$d\sigma\sim v_\infty^{-4/n}do.$$

习题 4 试求"坠落"至场 $U=-\alpha/r^2$ 中心的质点的有效截面.

解:满足条件 $2\alpha>m\rho^2v_\infty^2$ 的质点才能"坠落"至中心(参见(14.11)),即瞄准距离不大于 $\rho_{\max}=\sqrt{2\alpha/mv_\infty^2}$.所以有效截面为

$$\sigma=\pi\rho_{\max}^2=\frac{2\pi\alpha}{mv_\infty^2}.$$

习题 5 同上题,但 $U=-\alpha/r^n(n>2,\alpha>0)$.

解:有效势能

$$U_{\text{eff}}=\frac{m\rho^2v_\infty^2}{2r^2}-\frac{\alpha}{r^n}$$

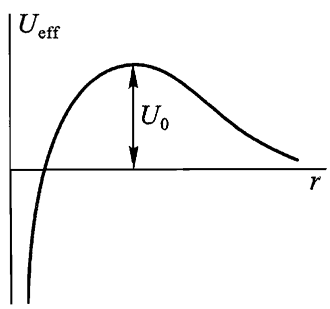


图 20

依赖于 r 的关系如图 20 所示,其最大值为

$$(U_{\text{eff}})_{\max} \equiv U_0 = \frac{(n-2)\alpha}{2}\left(\frac{m\rho^2 v_\infty^2}{n\alpha}\right)^{\frac{n}{n-2}}.$$

“坠落”至场中心的质点满足条件 $U_0 < E$. 由条件 $U_0 = E$ 求出 $\rho_{\max}$后，可得

$$\sigma = \pi n(n-2)^{\frac{2-n}{n}}\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^{2/n}.$$

习题 6 质点(质量为 m_1)落向球体(质量为 m_2，半径为 R)表面，它们之间的引力符合牛顿定律，试求有效截面.

解:质点落到球面上的条件是 $r_{\min} < R$，其中 $r_{\min}$是质点轨道上离球心最近的点. ρ 的最大可能值由条件 $r_{\min} = R$ 确定，这等价于求解方程 $U_{\text{eff}}(R) = E$ 或者

$$\frac{m_1 v_\infty^2 \rho_{\max}^2}{2R^2} - \frac{\alpha}{R} = \frac{m_1 v_\infty^2}{2},$$

其中 $\alpha = \gamma m_1 m_2$(γ 是引力常数)，并且在假定了 $m_2 \gg m_1$，我们已令 $m \approx m_1$. 从上面方程中求得 $\rho_{\max}^2$，进而可得

$$\sigma = \pi R^2\left(1 + \frac{2\gamma m_2}{Rv_\infty^2}\right).$$

当 $v_\infty \to \infty$ 时，自然地，有效截面就趋向于球的几何截面.

习题 7 给定能量 E 时，已知有效截面与散射角的函数关系，试求散射场的形式 $U(r)$. 假设 $U(r)$是 r 的单调递减函数(排斥场)，并且 $U(0) > E$，$U(\infty) = 0$(O.B. 飞尔萨夫，1953①).

解:根据公式

$$\int_\chi^\pi \frac{d\sigma}{d\chi} d\chi = \pi\rho^2 \tag{1}$$

对散射角 χ 求 $d\sigma$ 的积分给出瞄准距离的平方，因此，函数 $\rho(\chi)$(以及 $\chi(\rho)$)也可以看作是已知的.

引入记号

$$s = \frac{1}{r}, \quad x = \frac{1}{\rho^2}, \quad w = \sqrt{1 - \frac{U}{E}}. \tag{2}$$

公式(18.1)和(18.2)可写成

$$\frac{\pi - \chi(x)}{2} = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{xw^2 - s^2}}, \tag{3}$$

---

① Firsov O B. Determination of the forces acting between atoms by means of an effective differential cross section of elastic scattering [J]. Zh. Eksp. Teor. Fiz. (J. Exptl. Theoret. Phys.), 1953, C24: T279. ——译校者注

其中 s_0 是方程

$$xw^2(s_0)-s_0^2=0$$

的根.

方程(3)是函数 $w(s)$ 的积分方程,可以用类似于§12中所采用的方法求解.将方程(3)两边除以$\sqrt{\alpha-x}$,然后对 x 从零到 α 积分得

$$\int_0^\alpha \frac{\pi-\chi(x)}{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}}=\int_0^\alpha\int_0^{s_0(x)}\frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}x}{\sqrt{(xw^2-s^2)(\alpha-x)}}$$

$$=\int_0^{s_0(\alpha)}\int_{x(s_0)}^\alpha\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}s}{\sqrt{(xw^2-s^2)(\alpha-x)}}=\pi\int_0^{s_0(\alpha)}\frac{\mathrm{d}s}{w},$$

或者,将等式左边分部积分,

$$\pi\sqrt{\alpha}-\int_0^\alpha\sqrt{\alpha-x}\,\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{s_0(\alpha)}\frac{\mathrm{d}s}{w}.$$

将得到的关系式对 α 求导,再将 $s_0(\alpha)$简记为 s,并相应地将 α 替换为 s^2/w^2,得到微分形式表示的结果

$$\pi\mathrm{d}\left(\frac{s}{w}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{s^2}{w^2}\right)\int_0^{s^2/w^2}\frac{\chi'(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2}-x}}=\frac{\pi}{w}\mathrm{d}s$$

或者

$$-\pi\,\mathrm{d}\ln w=\mathrm{d}\left(\frac{s}{w}\right)\int_0^{s^2/w^2}\frac{\chi'(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{s^2}{w^2}-x}}$$

如果改变右边对 x 和对s/w 积分的顺序,这个方程可直接积分.考虑到当 $s=0$(即 $r\to\infty$)时必有 $w=1$(即 $U=0$),在换回到原来的变量 r 和 ρ 时,则得到(两个等价形式的)最终结果:

$$w=\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{rw}^\infty \operatorname{arcosh}\frac{\rho}{rw}\cdot\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{d}\rho\right)=\exp\left[-\frac{1}{\pi}\int_{rw}^\infty\frac{\chi(\rho)\mathrm{d}\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2w^2}}\right].\tag{4}$$

对所有的 $r>r_{\min}$,即具有给定能量 E 的质点发生散射可能到达的 r 范围内,这个公式隐含地确定了函数 $w(r)$(因而确定 $U(r)$).

§19 卢瑟福公式

前面所得公式的一个重要应用就是带电粒子在库仑场中的散射.

在公式(18.4)中令 $U=\alpha/r$ 并进行初等积分可得

$$\varphi_0=\arccos\frac{\frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}\right)^2}}$$

由此得

$$\rho^2=\frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4}\tan^2\varphi_0,$$

或者,根据(18.1),$\varphi_0=(\pi-\chi)/2$,得

$$\rho^2=\frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4}\cot^2\frac{\chi}{2}. \tag{19.1}$$

将该等式对 χ 求导并代入(18.7)或者(18.8),得

$$\mathrm{d}\sigma=\pi\left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2}\right)^2\frac{\cos\left(\frac{\chi}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\chi}{2}\right)}\mathrm{d}\chi \tag{19.2}$$

或者

$$\mathrm{d}\sigma=\left(\frac{\alpha}{2 m v_\infty^2}\right)^2\frac{\mathrm{d}o}{\sin^4\left(\frac{\chi}{2}\right)}. \tag{19.3}$$

这就是卢瑟福公式.需要指出的是,有效截面不依赖于 α 的符号,所得的结果对于库仑引力和斥力场都是同等适用的.

公式(19.3)给出碰撞质点的质心静止的参考系中的有效截面.利用公式(17.4)可以变换到实验室参考系中.对于初始静止的质点,将 $\chi=\pi-2\theta_2$ 代入公式(19.2),可得

$$\mathrm{d}\sigma_2=2\pi\left(\frac{\alpha}{2 m v_\infty^2}\right)^2\frac{\sin\theta_2}{\cos^3\theta_2}\mathrm{d}\theta_2=\left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2}\right)^2\frac{\mathrm{d}o_2}{\cos^3\theta_2} \tag{19.4}$$

对于入射质点,这个变换一般将导致非常复杂的公式,我们将仅注意两种特殊情况.

如果散射质点的质量 m_2 远大于被散射质点的质量 m_1,则 $\chi\approx\theta_1$,$m\approx m_1$,故

$$\mathrm{d}\sigma_1=\left(\frac{\alpha}{4E_1}\right)^2\frac{\mathrm{d}o_1}{\sin^4(\theta_1/2)}, \tag{19.5}$$

其中 $E_1=m_1 v_\infty^2/2$ 是入射质点的能量.

如果两个质点的质量相等($m_1=m_2$,$m=m_1/2$),则根据(17.9),$\chi=2\theta_1$,代入(19.2)得

$$\mathrm{d}\sigma_1=2\pi\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2\frac{\cos\theta_1}{\sin^3\theta_1}\mathrm{d}\theta_1=\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2\frac{\cos\theta_1}{\sin^4\theta_1}\mathrm{d}o_1. \tag{19.6}$$

如果两个质点不仅质量相等,而且是完全相同的质点,则散射后无法区分哪一个质点原来是静止的.将 $\mathrm{d}\sigma_1$ 和 $\mathrm{d}\sigma_2$ 相加,并将 θ_1 和 θ_2 用共同的值 θ 代替,可得所有质点的总有效截面:

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2\left(\frac{1}{\sin^4\theta}+\frac{1}{\cos^4\theta}\right)\cos\theta d o. \tag{19.7}$$

我们重新回到一般公式(19.2),并利用它确定散射质点按碰撞中损失能量的分布.对于任意的散射质点质量(m_2)和被散射质点质量(m_1),散射质点所获得的速度用质心参考系中的散射角表示为

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_\infty \sin\frac{\chi}{2}$$

(参见(17.5)).相应地,这个质点获得的能量就是质点 m_1 损失的能量,等于

$$\varepsilon = \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{2m^2}{m_2} v_\infty^2 \sin^2\frac{\chi}{2}.$$

由此将 $\sin(\chi/2)$ 用 ε 表示并代入(19.2),得

$$d\sigma = 2\pi\frac{\alpha^2}{m_2 v_\infty^2}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}. \tag{19.8}$$

这个公式确定了有效截面对损失能量 ε 的依赖关系,损失能量的取值范围从零到 $\varepsilon_{max} = 2m^2 v_\infty^2/m_2$.

习 题

习题 1 试求在场 $U = \alpha/r^2(\alpha > 0)$ 中散射的有效截面.

解:偏转角:

$$\chi = \pi\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+2\alpha/(m\rho^2 v_\infty^2)}}\right].$$

有效截面

$$d\sigma = \frac{2\pi^2\alpha}{m v_\infty^2}\frac{\pi-\chi}{\chi^2(2\pi-\chi)^2}\frac{d o}{\sin\chi}.$$

习题 2 试求被半径为 a 深度为 U_0 的球形势阱(即当 $r > a$ 时 $U = 0$,当 $r < a$ 时 $U = -U_0$ 的势场)散射的有效截面.

解:质点进入和离开势阱时,其直线轨迹被"折射".根据§7 习题,入射角 α 和折射角 β(图 21)的关系为

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n, \quad n = \sqrt{1+\frac{2U_0}{m v_\infty^2}}.$$

偏转角为 $\chi = 2(\alpha-\beta)$.所以有

$$\frac{\sin(\alpha-\chi/2)}{\sin\alpha} = \cos\frac{\chi}{2} - \cot\alpha\sin\frac{\chi}{2} = \frac{1}{n}.$$

由该方程以及由图显然有关系

$$a\sin\alpha = \rho$$

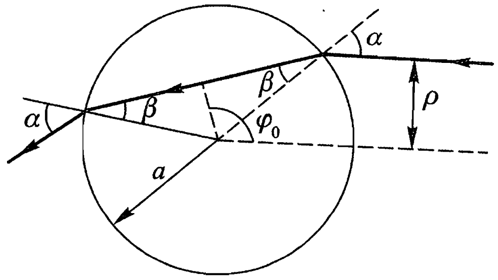


图 21

消去 α，可得 ρ 和 χ 的关系如下：

$$\rho^2 = a^2 \frac{n^2 \sin^2\left(\frac{\chi}{2}\right)}{n^2 + 1 - 2n\cos\left(\frac{\chi}{2}\right)}.$$

最后，对这个等式求微分可得有效截面

$$d\sigma = \frac{a^2 n^2}{4\cos\left(\frac{\chi}{2}\right)} \frac{\left[n\cos\left(\frac{\chi}{2}\right) - 1\right]\left[n - \cos\left(\frac{\chi}{2}\right)\right]}{\left[1 + n^2 - 2n\cos\left(\frac{\chi}{2}\right)\right]^2} do.$$

角 χ 取值范围从零（当 $\rho = 0$ 时）到下式确定的 χ_{max}（当 $\rho = a$ 时）：

$$\cos\left(\frac{\chi_{max}}{2}\right) = \frac{1}{n}.$$

将 $d\sigma$ 对锥体 $\chi < \chi_{max}$ 内所有角度积分可得总有效截面，显然，就等于几何截面 πa^2.

§ 20 小角度散射

如果仅考虑那些碰撞，其瞄准距离很大，场 U 很弱因而偏转角很小，则有效截面的计算非常简单. 这时可以直接在实验室参考系中计算，不必采用质心参考系.

我们取 x 轴沿着散射质点（质量为 m_1）初始动量的方向，而 xy 平面为散射平面. 用 $\boldsymbol{p}_1'$ 表示散射后质点的动量，显然有

$$\sin\theta_1 = \frac{p_{1y}'}{p_1'}.$$

对于小偏转角，可以近似地用 θ_1 代替 $\sin\theta_1$，在分母中将 p_1' 代以初始动量 $p_1 = m_1 v_\infty$：

$$\theta_1 \approx p_{1y}'/(m_1 v_\infty) \tag{20.1}$$

其次，由于 $\dot{p}_y = F_y$，故 y 轴方向动量总的增量为

$$p_{1y}' = \int_{-\infty}^{\infty} F_y \mathrm{d}t \tag{20.2}$$

这时,力

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{y}{r}.$$

因为积分(20.2)已经包含小量 U,所以计算该积分时在相同的近似下可以假设质点完全没有偏离初始路径,即质点沿着直线 $y=\rho$ 以速度 v_∞ 匀速运动.相应地,在(20.2)中代入

$$F_y = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\rho}{r}, \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{v_\infty}$$

可得

$$p_{1y}' = -\frac{\rho}{v_\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}x}{r}.$$

最后,我们将对 x 的积分变换为对 r 的积分.由于对直线轨道有 $r^2=x^2+\rho^2$,故当 x 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时,r 从 ∞ 变到 ρ 再变回到 ∞.所以对 x 的积分变为两倍的对 r 从 ρ 到 ∞ 的积分,并且 $\mathrm{d}x$ 变为:

$$\mathrm{d}x = \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-\rho^2}}.$$

最后得散射角(20.1)的表达式如下:①

$$\theta_1 = -\frac{2\rho}{m_1 v_\infty^2}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-\rho^2}}. \tag{20.3}$$

此式给定小偏转角情况下 θ_1 对 ρ 的依赖关系.(在实验室参考系中的)有效散射截面可以由公式(18.8)将 χ 换为 θ_1,以及 $\sin\theta_1$ 代以 θ_1 而得到:

$$\mathrm{d}\sigma = \left|\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta_1}\right|\frac{\rho(\theta_1)}{\theta_1}\mathrm{d}o_1. \tag{20.4}$$

习 题

习题1 试从公式(18.4)推导公式(20.3).

解:为了避免下面推导中出现伪发散积分,将公式(18.4)写成下面形式:

$$\varphi_0 = -\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{r_{\min}}^{R}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2U}{mv_\infty^2}}\mathrm{d}r,$$

这里我们将很大的有限量 R 作为积分上限,以后令 $R\to\infty$ 再求原积分的值.由

① 如果在质心参考系中进行上述推导,则我们会得到对于 χ 的同样表达式,但要将 m_1 换为 m.这与根据(17.4),小角度 θ_1 和 χ 之间有下列关系的事实是一致的,

$$\theta_1 = \frac{m_2\chi}{m_1+m_2}.$$

于 U 很小,我们将根号按 U 的幂次展开,用 ρ 近似代替 $r_{\min}$:

$$\varphi_0 = \int_\rho^R \frac{\rho \mathrm{d}r}{r^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}} + \frac{\partial}{\partial\rho}\int_\rho^\infty \frac{U(r)\mathrm{d}r}{mv_\infty^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}}.$$

取极限 $R\to\infty$ 后,第一个积分等于 $\pi/2$. 对第二项积分分部积分,可得表达式

$$\chi = \pi - 2\varphi_0 = 2\frac{\partial}{\partial\rho}\int_\rho^\infty \frac{\sqrt{r^2-\rho^2}}{mv_\infty^2}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r = -\frac{2\rho}{mv_\infty^2}\int_\rho^\infty \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-\rho^2}},$$

它等价于(20.3).

习题 2　试求在场 $U=\alpha/r^n(n>0)$ 内小角度散射的有效截面.

解:根据(20.3)有

$$\theta_1 = \frac{2\rho\alpha n}{m_1 v_\infty^2}\int_\rho^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^{n+1}\sqrt{r^2-\rho^2}}.$$

作变量代换 $\rho^2/r^2=u$,将积分变为 B 函数,它可用 Γ 函数表示为

$$\theta_1 = \frac{2\alpha\sqrt{\pi}}{m_1 v_\infty^2\rho^n}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

由此用 θ_1 表示 ρ 并代入(20.4)得

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{n}\left[\frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{\alpha}{m_1 v_\infty^2}\right]^{2/n}\theta_1^{-2(1+1/n)}\mathrm{d}o_1.$$

第五章

微振动

§21　一维自由振动

在稳定平衡位置附近的运动是力学系统的一种非常普遍的运动类型,称为*微振动*.我们从最简单的情况即只有一个自由度的系统,开始研究这种运动.

稳定平衡位置是指势能 $U(q)$取极小值的位置,偏离该位置会导致产生力 $-\mathrm{d}U/\mathrm{d}q$,它力图使系统返回平衡位置.我们用 q_0 表示广义坐标 q 在平衡位置的值.在偏离平衡位置很小的情况下,在 $U(q)-U(q_0)$按 $q-q_0$ 的幂次展开的表达式中保留到第一个非零项就足够了.一般情况下这是二阶项

$$U(q)-U(q_0)\approx\frac{k}{2}(q-q_0)^2,$$

其中 k 是二阶导数 $U''(q)$在 $q=q_0$ 处的值,是正数.今后我们从势能的最小值开始计算势能(即假设 $U(q_0)=0$),并引入记号

$$x=q-q_0 \tag{21.1}$$

表示坐标对平衡位置的偏离.于是有

$$U(x)=\frac{kx^2}{2}. \tag{21.2}$$

一个自由度系统的动能一般可以写成

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2=\frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2.$$

在同样的近似下函数 $a(q)$可以用它在 $q=q_0$ 处的值代替.引入记号①

① 需要强调的是,只有当 x 是笛卡儿坐标时 m 才是质量.

$$a(q_0)=m,$$

最后可得一维微振动系统[①]的拉格朗日函数表达式如下：

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2}. \tag{21.3}$$

相应的运动方程为

$$m\ddot{x}+kx=0, \tag{21.4}$$

或者

$$\ddot{x}+\omega^2x=0, \tag{21.5}$$

这里引入了记号

$$\omega=\sqrt{k/m}. \tag{21.6}$$

线性微分方程(21.5)的两个线性无关的解为：$\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$，因此方程的通解为

$$x=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t. \tag{21.7}$$

这个表达式也可以写成

$$x=a\cos(\omega t+\alpha). \tag{21.8}$$

因为 $\cos(\omega t+\alpha)=\cos\omega t\cos\alpha-\sin\omega t\sin\alpha$，与(21.7)比较可得任意常数 a 和 α 与常数 c_1 和 c_2 的关系：

$$a=\sqrt{c_1^2+c_2^2},\quad \tan\alpha=-c_2/c_1. \tag{21.9}$$

于是，系统在稳定平衡位置附近的运动是简谐振动.(21.8)中周期因子前面的系数 a 称为振动的振幅，而余弦的宗量称为振动的相位，α 是相位的初始值，显然依赖于初始时间的选择.物理量 ω 称为振动的圆频率.然而，在理论物理学中，通常简称为频率，今后我们就用这个简称.

频率是振动的基本特征量，不依赖于运动初始条件.根据公式(21.6)，它完全由力学系统本身的性质决定.但是应该指出，频率的这个性质与小振幅振动假设有关，在更高阶近似时就没有这个性质了.从数学角度看，它与势能是坐标的二次函数有关.[②]

微振动系统的能量为

$$E=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\omega^2x^2),$$

或者，将(21.8)代入此式得

$$E=\frac{1}{2}m\omega^2a^2. \tag{21.10}$$

能量与振幅平方成正比.

---

① 这样的系统常称为一维振子.

② 因此，如果函数 $U(x)$ 在 $x=0$ 处取数量级更高的极小值，即 $U\propto x^n$，$n>2$(参见§11 的习题 2a)，则没有这个性质.

振动系统坐标对时间的依赖关系经常方便地写成复数表达式的实部：

$$x = \mathrm{Re}\{A e^{i\omega t}\}, \tag{21.11}$$

其中 A 是复常数，写成下面形式：

$$A = a e^{i\alpha}, \tag{21.12}$$

则又回到(21.8)式了．常数 A 称为复振幅，它的模就是通常的振幅，而辐角就是初相位．

在数学上，指数函数运算比三角函数运算简单，因为指数函数的微分并不改变形式．只要我们进行的是线性运算（加法、数乘、微分和积分），一般可以不写出取实部的符号 Re，只需对最后的计算结果取实部．

习 题

习题 1 试用坐标和速度的初始值 x_0 和 v_0 表示振动的振幅和初始相位．

答：

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \tan\alpha = -\frac{v_0}{\omega x_0}.$$

习题 2 试求由不同同位素原子组成的两个双原子分子的振动频率 ω 和 ω' 的比值，设原子的质量分别等于 m_1, m_2 和 m_1', m_2'.

解：因为同位素原子以相同的方式相互作用，则有 $k = k'$．在分子动能中起系数 m 作用的是约化质量．根据(21.6)有

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{m_1 m_2 (m_1' + m_2')}{m_1' m_2' (m_1 + m_2)}}.$$

习题 3 设质量为 m 的质点沿着直线运动，弹簧一端连在质点上，另一端固定于 A 点（图 22）．A 点到直线的距离为 l，弹簧长度为 l 时受力为 F，试求质点的振动频率．

解：弹簧势能等于力 F 乘以弹簧伸长量 δl（精确到更高阶项）．当 $x \ll l$ 时，有

$$\delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \approx x^2/(2l),$$

因此，$U = Fx^2/(2l)$．因为动能为 $m\dot{x}^2/2$，故

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{ml}}.$$

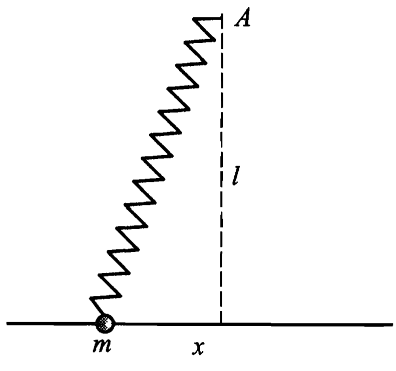


图 22

习题 4 同上题，质量为 m 的质点沿着半径为 r 的圆运动（图 23）．

解：在这种情况下，弹簧伸长量为（在 $\varphi \ll 1$ 时）

$$\delta l=\sqrt{r^2+(l+r)^2-2r(l+r)\cos\varphi}-l\approx\frac{r(l+r)}{2l}\varphi^2.$$

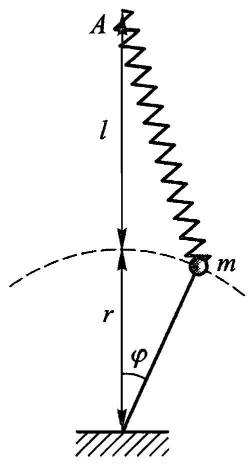


图 23

动能为 $T=(1/2)mr^2\dot{\varphi}^2$. 由此得频率:

$$\omega=\sqrt{\frac{F(r+l)}{rlm}}.$$

习题 5 试求§5 图 2 所示摆的振动频率,悬挂点(质量为 m_1)可沿着水平方向自由运动.

解:当 $\varphi\ll1$ 时,由§14 习题 3 所得公式有

$$T=\frac{m_1m_2l^2}{2(m_1+m_2)}\dot{\varphi}^2,\qquad U=\frac{m_2gl}{2}\varphi^2.$$

由此得

$$\omega=\sqrt{\frac{g(m_1+m_2)}{m_1l}}.$$

习题 6 设质点沿着某曲线(在重力场中)振动的频率不依赖于振幅,试求该曲线的形状.

解:如果质点沿着曲线运动的势能为 $U=ks^2/2$,其中 s 为从平衡位置算起的弧长,则该曲线能满足要求.这时动能为 $T=m\dot{s}^2/2$(m 为质点的质量),振动频率为 $\omega=\sqrt{k/m}$,不依赖于 s 的初始值.

但在重力场中 $U=mgy$,其中 y 是纵坐标.所以有 $ks^2/2=mgy$ 或者

$$y=\frac{\omega^2}{2g}s^2.$$

另一方面,$ds^2=dx^2+dy^2$,由此得

$$x=\int\sqrt{\left(\frac{ds}{dy}\right)^2-1}dy=\int\sqrt{\frac{g}{2\omega^2y}-1}dy.$$

作代换

$$y=\frac{g}{4\omega^2}(1-\cos\xi)$$

后,很容易积分得

$$x=\frac{g}{4\omega^2}(\xi+\sin\xi).$$

这两个等式给出了所求曲线的参数方程,这是一条摆线.

§22 强迫振动

现在我们研究可变外力场作用下系统的振动,这种振动称为强迫振动,以区别于§21 研究的自由振动.因为前面也假定是微振动,则意味着外力场很弱,否则它会引起过大的位移 x.

这种情况下,系统除了固有势能$(1/2)kx^2$以外,还有与外力场作用相关的势能$U_e(x,t)$.将这个附加势能展开为小量x的幂级数,得

$$U_e(x,t)\approx U_e(0,t)+x\left.\frac{\partial U_e}{\partial x}\right|_{x=0}.$$

第一项只是时间的函数,可以从拉格朗日函数中略去(作为另一个时间的函数对时间的全导数).第二项中$-\partial U_e/\partial x$是外力,作用于处在平衡位置的系统上,是时间的给定函数,用$F(t)$表示.于是势能中出现了$-xF(t)$项,所以系统的拉格朗日函数为

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2}+xF(t). \tag{22.1}$$

相应的运动方程为

$$m\ddot{x}+kx=F(t),$$

或者

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\frac{1}{m}F(t), \tag{22.2}$$

这里我们再次引入了自由振动频𬞟ω.

众所周知,非齐次常系数线性微分方程的通解为两项之和:$x=x_0+x_1$,其中x_0是齐次方程的通解,x_1是非齐次方程的特解.在现在的情况下,x_0就是§21研究的自由振动.

我们来看一种特别有意义的情况,强迫力是频率为γ的简单时间周期函数,即

$$F(t)=f\cos(\gamma t+\beta). \tag{22.3}$$

我们寻找方程(22.2)形式为$x_1=b\cos(\gamma t+\beta)$的特解,它具有与强迫力同样的周期因子.代入方程可得:$b=f/[m(\omega^2-\gamma^2)]$,加上齐次方程的解,有下列形式的通解

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)+\frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}\cos(\gamma t+\beta). \tag{22.4}$$

任意积分常数a和α由初始条件确定.

于是,在周期性强迫力作用下,系统的运动是两个振动的合成,两个振动的频率分别为系统的固有频率ω和强迫力的频率γ.

解(22.4)不适用于所谓的共振情况,即强迫力的频率γ与固有频率ω相等的情况.为了求这种情况下方程的通解,将(22.4)改写成如下形式,

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)+\frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}[\cos(\gamma t+\beta)-\cos(\omega t+\beta)].$$

其中常数a现在有不同的值.当$\gamma\to\omega$时,第二项变为0/0的不确定形式.按照洛必达法则消除不确定性可得

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)+\frac{f}{2m\omega}t\sin(\omega t+\beta). \tag{22.5}$$

于是，在共振情况下，振动的振幅随时间线性增大（直到不再是微振动，上述所有理论都不适用为止）.

我们再来研究共振附近的微振动的性质，即 $\gamma=\omega+\varepsilon$，其中 ε 是小量. 我们将通解写成复数形式

$$x=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+B\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega+\varepsilon)t}=(A+B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}. \tag{22.6}$$

因为 $A+B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon t}$ 在因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 的周期 $2\pi/\omega$ 内变化很小，所以共振附近的运动可以看作是微振动，但振幅是变化的.①

用 C 表示振幅，有

$$C=|A+B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon t}|.$$

将 A 和 B 分别表示为 $a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ 和 $b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$，可得

$$C^2=a^2+b^2+2ab\cos(\varepsilon t+\beta-\alpha). \tag{22.7}$$

于是，振幅以频率 ε 周期变化，其变化范围是

$$|a-b|\leqslant C\leqslant a+b.$$

这种现象称为拍.

对任意强迫力 $F(t)$，可以在一般形式下对方程(22.2)积分求解. 这很容易做到，只要将方程重写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}+\mathrm{i}\omega x)-\mathrm{i}\omega(\dot{x}+\mathrm{i}\omega x)=\frac{1}{m}F(t)$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}-\mathrm{i}\omega\,\xi=\frac{1}{m}F(t), \tag{22.8}$$

这里引入了复变量

$$\xi=\dot{x}+\mathrm{i}\omega x. \tag{22.9}$$

方程(22.8)不是二阶，而是一阶微分方程. 如果没有右边部分，它的解是 $\xi=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，其中 A 是常数. 如同前面一样，我们寻找非齐次方程形式为 $\xi=A(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 的解，对于函数 $A(t)$ 可得方程

$$\dot{A}(t)=\frac{1}{m}F(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

积分后，可得方程(22.8)的解

$$\xi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\left[\int_0^t\frac{1}{m}F(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t+\xi_0\right], \tag{22.10}$$

其中积分常数 ξ_0 是 $t=0$ 时 ξ 的值. 这就是需要寻找的通解，函数 $x(t)$ 由(22.10)的虚部除以 ω 给出.②

① 振动相位中的“常数”项也要变化.

② 当然，这时力 $F(t)$ 应该写成实数形式.

系统做强迫振动时能量显然是不守恒的,因为系统靠外场源获得能量.假设初始能量为零,我们来求在外力作用时间内(从 $-\infty$ 到 $+\infty$)传递到系统的总能量.根据公式(22.10)(积分下限用 $-\infty$ 代替零,并且 $\xi(-\infty)=0$),在 $t\to\infty$ 时有

$$|\xi(\infty)|^2=\frac{1}{m^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-i\omega t}dt\right|^2.$$

另一方面,系统的能量表达式为

$$E=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\omega^2x^2)=\frac{m}{2}|\xi|^2. \tag{22.11}$$

将 $|\xi(\infty)|^2$ 代入此式,可得所要求的转移能量

$$E=\frac{1}{2m}\left|\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-i\omega t}dt\right|^2. \tag{22.12}$$

其值由力 $F(t)$ 的傅里叶分量模的平方所决定,该力的频率等于系统的固有频率.

特别地,如果外力作用的时间与 $1/\omega$ 相比很短,则可以令 $e^{-i\omega t}\approx 1$.于是有

$$E=\frac{1}{2m}\left(\int_{-\infty}^{\infty}F(t)dt\right)^2.$$

这个结果是显然的,它表明短时间的力给系统提供冲量 $\int F dt$,但来不及使系统产生显著的位移.

习 题

习题 1 如果初始时刻 $t=0$ 系统静止在平衡位置($x=\dot{x}=0$),试求系统在下列几种形式的外力 $F(t)$ 作用下的强迫振动.

a) $F=\text{const}=F_0$.

答: $x=\frac{F_0}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)$,常力作用的结果是使振动所围绕的平衡位置产生位移.

b) $F=at$.

答: $x=\frac{a}{m\omega^3}(\omega t-\sin\omega t)$.

c) $F=F_0e^{-\alpha t}$.

答: $x=\frac{F_0}{m(\omega^2+\alpha^2)}\left(e^{-\alpha t}-\cos\omega t+\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)$.

d) $F=F_0e^{-\alpha t}\cos\beta t$.

答:

$$x=\frac{F_0}{m[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2]}\{-(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\cos\omega t+$$

$$\frac{\alpha}{\omega}(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)\sin\omega t+\mathrm{e}^{-\alpha t}[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\cos\beta t-2\alpha\beta\sin\beta t]\}$$

(在求解过程中将力写成复数形式 $F=F_0\mathrm{e}^{(-\alpha+\mathrm{i}\beta)t}$ 比较方便).

习题 2　设直到 $t=0$ 时系统静止在平衡位置,力 F 的变化规律为:当 $t<0$ 时 $F=0$,当 $0<t<T$ 时 $F=F_0t/T$,当 $t>T$ 时 $F=F_0$(图 24).试求在该力作用后系统振动的最后振幅.

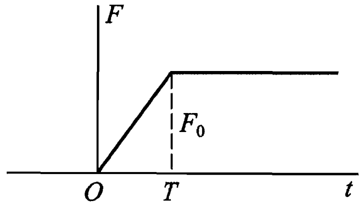


图 24

解:在时间间隔 $0<t<T$ 内满足初始条件的振动为

$$x=\frac{F_0}{mT\omega^3}(\omega t-\sin\omega t).$$

当 $t>T$ 时我们求下面形式的解:

$$x=c_1\cos[\omega(t-T)]+c_2\sin[\omega(t-T)]+\frac{F_0}{m\omega^2}.$$

由 x 和 $\dot{x}$ 在 $t=T$ 处连续的条件,可求出

$$c_1=-\frac{F_0}{mT\omega^3}\sin\omega T,\quad c_2=\frac{F_0}{mT\omega^3}(1-\cos\omega T).$$

这样得振幅

$$a=\sqrt{c_1^2+c_2^2}=\frac{2F_0}{mT\omega^3}\sin\frac{\omega T}{2}.$$

可见,施加力 F_0 越缓慢(即 T 越大),这个振幅越小.

习题 3　同习题2,力 F_0 是常数,只在有限时间间隔 T 内作用(图 25).

解:可以像习题 2 那样求解,但利用公式(22.10)更简单.当 $t>T$ 时系统在平衡位置 $x=0$ 处自由振动,有

$$\xi=\frac{F_0}{m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\int_0^T\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{F_0}{\mathrm{i}\omega m}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

根据关系 $|\xi|^2=a^2\omega^2$,ξ 的模的平方给出振幅.于是求得

$$a=\frac{2F_0}{m\omega^2}\sin\frac{\omega T}{2}.$$

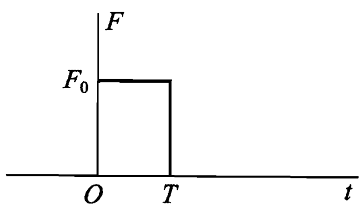


图 25

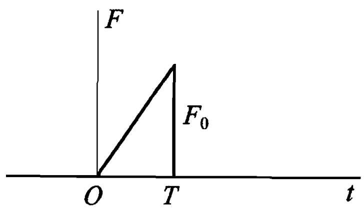


图 26

习题 4　同习题 2,但力在从零到 T 时间间隔内按规律 $F=F_0t/T$ 作用(图 26).

解:用同样方法可求得

$$a = \frac{F_0}{Tm\omega^3}\sqrt{\omega^2 T^2 - 2\omega T\sin\omega T + 2(1-\cos\omega T)}.$$

习题 5　同习题2,但力在从零到 $T = 2\pi/\omega$ 时间间隔内按规律 $F = F_0\sin\omega t$ 作用(图 27).

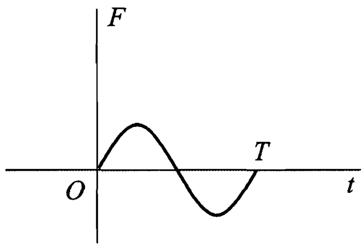


图 27

解:将

$$F(t) = F_0\sin\omega t = \frac{F_0}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})$$

代入公式(22.10)并从零到 T 积分,可得

$$a = \frac{F_0\pi}{m\omega^2}.$$

§ 23　多自由度系统振动

多自由度(s)系统的自由振动理论类似于§21 的一维振动.

设系统的势能 U 是广义坐标 $q_i(i = 1,2,\cdots,s)$的函数,在 $q_i = q_{i0}$处取极小值.引入偏离平衡位置的小位移

$$x_i = q_i - q_{i0}, \tag{23.1}$$

把 U 展开为 x_i 的级数,并保留到二阶项,可得二次正定形式的势能:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,k} k_{ik}x_i x_k, \tag{23.2}$$

这里我们又取势能的极小值为零.因为(23.2)中 k_{ik},k_{ki}都是相同量 $x_i x_k$ 的系数,那么它们总是可以被认为相等的:

$$k_{ik} = k_{ki}.$$

动能的一般形式为(参见(5.5))

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k,$$

在系数 a_{ik}中令 $q_i = q_{i0}$,并用 m_{ik}表示 $a_{ik}(q_0)$,可得二次正定形式的动能:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k} m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k. \tag{23.3}$$

也总可以认为系数 m_{ik}对下标是对称的:

$$m_{ik} = m_{ki}.$$

于是,自由微振动系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k - k_{ik}x_i x_k). \tag{23.4}$$

现在我们导出运动方程.为了确定方程中包含的导数,我们写出拉格朗日函数的全微分:

$$\mathrm{d}L = \frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i\mathrm{d}\dot{x}_k + m_{ik}\dot{x}_k\mathrm{d}\dot{x}_i - k_{ik}x_i\mathrm{d}x_k - k_{ik}x_k\mathrm{d}x_i).$$

既然上面和之值不依赖于求和指标的名称,我们可以将括号中第一和第三项的 i 和 k 相互交换,考虑到系数 m_{ik}和 k_{ik}的对称性,得

$$\mathrm{d}L = \sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_k\mathrm{d}\dot{x}_i - k_{ik}x_k\mathrm{d}x_i).$$

由此可见,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_k m_{ik}\dot{x}_k,\quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\sum_k k_{ik}x_k.$$

所以拉格朗日方程为

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k + \sum_k k_{ik}x_k = 0. \tag{23.5}$$

这是 $s(i=1,2,\cdots,s)$个线性齐次常系数微分方程组.

通常,我们寻找下面形式的 s 个未知函数 $x_k(t)$:

$$x_k = A_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{23.6}$$

其中 A_k 是一些待定常数.将(23.6)代入方程组(23.5),约去 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$,可得常数 A_k 满足的齐次线性代数方程组

$$\sum_k(-\omega^2 m_{ik} + k_{ik})A_k = 0. \tag{23.7}$$

如果该方程组有非零解,则其系数行列式必须等于零:

$$|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}| = 0. \tag{23.8}$$

方程(23.8)称为特征方程,是 ω^2 的 s 阶方程.在一般情况下,该方程有 s 个不同的正实根 ω_α^2, $\alpha=1,2,\cdots,s$(在特殊情况下,这些根中有重根).这样求出的 ω_α 称为系统的特征频率或本征频率.

从物理的观点来看,显然方程(23.8)的根为正实数.事实上,ω 有虚部就意味着,坐标 x_k 对时间的依赖关系(23.6)(以及速度 $\dot{x}_k$)中包含指数减小或指数增长的因子.但这样的因子是不允许的,否则会导致系统总能量 $E=U+T$ 随时间变化,违背能量守恒定律.

也可以用数学方法证明上述结论.将(23.7)乘以 A_i^* 并对下标 i 求和,得

$$\sum_{i,k}(-\omega^2 m_{ik} + k_{ik})A_i^*A_k = 0,$$

由此得

$$\omega^2 = \frac{\sum k_{ik}A_i^*A_k}{\sum m_{ik}A_i^*A_k}.$$

由于系数 m_{ik}和 k_{ik}都是对称的实数,上式分子和分母中的二次型都是实数.事实上,

$$\left(\sum_{i,k}k_{ik}A_i^*A_k\right)^* = \sum_{i,k}k_{ik}A_iA_k^* = \sum_{i,k}k_{ki}A_iA_k^* = \sum_{i,k}k_{ik}A_kA_i^*.$$

它们也是正的①,因而 ω^2 也是正的. 求得频率 ω_α 并将它们之中的每一个代入方程组(23.7),就可以求出相应的系数 A_k. 如果特征方程所有的根 ω_α 各不相同,则系数 A_k 正比于行列式(23.8)的代数余子式,其中 ω 用 ω_α 代替. 用 $\Delta_{k\alpha}$ 表示这些余子式. 微分方程(23.5)的特解因此有下面形式:

$$x_k = \Delta_{k\alpha} C_\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_\alpha t},$$

其中 C_α 是任意常数(复数).

所有这 s 个特解求和,可给出通解. 取其实部,写成

$$x_k = \mathrm{Re}\left\{\sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_{k\alpha} C_\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_\alpha t}\right\} \equiv \sum_\alpha \Delta_{k\alpha} \Theta_\alpha, \tag{23.9}$$

这里我们引入了记号

$$\Theta_\alpha = \mathrm{Re}\{C_\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_\alpha t}\}. \tag{23.10}$$

于是,系统每个坐标随时间的变化都是 s 个简单周期振动 $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_s$ 的叠加,这些简单振动的振幅和相位都是任意的,但频率完全确定.

这自然会产生一个问题,可否选择广义坐标使得每个坐标都仅进行简单振动? 通解(23.9)的形式给出了解决这个问题的途径.

事实上,将(23.9)的 s 个关系式看作是 s 个未知量 $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_s$ 的方程组,求解后可以用 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 表示 $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_s$. 因此 $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_s$ 可以看作新的广义坐标,这些坐标称为*简正坐标*(或者*主坐标*),它们进行简单的周期振动,称为系统的*简正振动*.

从简正坐标的定义可以看出,它们满足方程

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0. \tag{23.11}$$

这就是说,采用简正坐标,动力学方程组变为 s 个相互独立的方程. 每个简正坐标的加速度仅依赖于该坐标,只需已知坐标和相应速度的初值,就可以完全确定坐标对时间的依赖关系. 换句话说,系统的简正振动是完全独立的.

由上述可知,用简正坐标表示的拉格朗日函数可以分解为一些表示式之和,每一个表示式都对应于某一频率 ω_α 的一维振动,即有如下形式

$$L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}(\dot{\Theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha^2), \tag{23.12}$$

其中 m_α 是正常数. 从数学观点看,这意味着变换(23.9)将两个二次型(动能(23.3)和势能(23.2))同时变为对角的形式.

---

① 系数为 k_{ik} 的二次型是正定的,从(23.2)中对实变量的定义看,这是显然的. 但如果将复数 A_k 明显地写成 $a_k + \mathrm{i}b_k$,则可得(注意到 k_{ik} 的对称性):

$$\sum_{i,k} k_{ik} A_i^* A_k = \sum_{i,k} k_{ik}(a_i - \mathrm{i}b_i)(a_k + \mathrm{i}b_k) = \sum_{i,k} k_{ik} a_i a_k + \sum_{i,k} k_{ik} b_i b_k,$$

即两个正定二次型的和.

通常可以选择简正坐标,使得在拉格朗日函数中速度平方的系数等于 1/2. 为此,用下式定义新的简正坐标 Q_α:

$$Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha}\Theta_\alpha. \tag{23.13}$$

那么

$$L = \frac{1}{2}\sum_\alpha(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2).$$

当特征方程有重根时,上面的讨论几乎不需要改变.运动方程的积分的一般形式(23.9)和(23.10)也是一样的(也同为 s 项),差别仅仅在于相应于重根的系数 $\Delta_{k\alpha}$ 已不再是行列式的代数余子式,这种情况下这些余子式等于零.①

一个多重(或称简并)频率相应的简正坐标的个数等于这个频率的重数,但是这些简正坐标的选择不是唯一的.对于相同 ω_α 的简正坐标,它们以和形式 $\sum\dot{Q}_\alpha^2$ 和 $\sum Q_\alpha^2$ 包含在动能和势能中,这些和按相同的方式变换,因此可以对这些简正坐标进行任何方式的线性变换,只要不改变这些平方和.

对于在常外场中一个质点的三维振动,求简正坐标非常容易.取笛卡儿坐标系的原点位于势能 $U(x,y,z)$ 的极小值处,可得变量 x,y,z 的二次形式的势能,而动能

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

(m 为质点的质量)不依赖于坐标轴的取向.因此,仅需适当旋转坐标系即可将势能化为对角的形式.于是

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_1y^2 + k_1z^2), \tag{23.14}$$

且沿着 x,y,z 方向的振动是简正振动,其频率分别为

$$\omega_1 = \sqrt{k_1/m}, \quad \omega_2 = \sqrt{k_2/m}, \quad \omega_3 = \sqrt{k_3/m}.$$

在有心对称力场($k_1 = k_2 = k_3 \equiv k$, $U = kr^2/2$)的特殊情况下,这三个频率相等(见习题 3).

利用简正坐标可以将多自由度强迫振动问题转化为一系列单自由度强迫振动的问题.考虑到作用在系统上的可变外力,拉格朗日函数为

$$L = L_0 + \sum_k F_k(t)x_k, \tag{23.15}$$

其中 L_0 是自由振动的拉格朗日函数.用简正坐标代替 x_k 可得

① 由与证明频率是实数相同的观点可以看出,在通解中不可能出现包含时间的指数和幂次的项,否则将违背能量守恒定律.

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}(\dot{Q}_{\alpha}^{2} - \omega_{\alpha}^{2}Q_{\alpha}^{2}) + \sum_{\alpha}f_{\alpha}(t)Q_{\alpha}, \tag{23.16}$$

其中引入了记号：

$$f_{\alpha}(t) = \sum_{k}F_{k}(t)\frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_{\alpha}}}.$$

相应的运动方程

$$\ddot{Q}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^{2}Q_{\alpha} = f_{\alpha}(t) \tag{23.17}$$

只包含一个未知函数 $Q_{\alpha}(t)$.

习　题

习题 1　设两个自由度系统的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^{2} + \dot{y}^{2}) - \frac{\omega_{0}^{2}}{2}(x^{2} + y^{2}) + \alpha xy$$

(两个全同的本征频率为 ω_0 的一维系统以相互作用 $-\alpha xy$ 耦合起来)，试求系统的振动.

解：运动方程为

$$\ddot{x} + \omega_{0}^{2}x = \alpha y, \quad \ddot{y} + \omega_{0}^{2}y = \alpha x.$$

将(23.6)代入可得

$$A_{x}(\omega_{0}^{2} - \omega^{2}) = \alpha A_{y}, \quad A_{y}(\omega_{0}^{2} - \omega^{2}) = \alpha A_{x}. \tag{1}$$

特征方程为

$$(\omega_{0}^{2} - \omega^{2})^{2} = \alpha^{2},$$

由此得

$$\omega_{1}^{2} = \omega_{0}^{2} - \alpha, \quad \omega_{2}^{2} = \omega_{0}^{2} + \alpha.$$

当 $\omega = \omega_1$ 时方程(1)给出 $A_x = A_y$，当 $\omega = \omega_2$ 时方程(1)给出 $A_x = -A_y$，所以

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_{1} + Q_{2}), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_{1} - Q_{2})$$

(系数 $1/\sqrt{2}$ 来自于方程(23.13)对简正坐标的归一化).

当 $\alpha \ll \omega_0^2$ 时(弱耦合)，有

$$\omega_{1} \approx \omega_{0} - \alpha/(2\omega_{0}), \quad \omega_{2} \approx \omega_{0} + \alpha/(2\omega_{0}).$$

在这种情况下 x 和 y 的变化是两个频率几乎相等的振动的叠加，即具有频率为 $\omega_2 - \omega_1 = \alpha/\omega_0$ 的拍(参见§22). 当坐标 x 的振幅达到最大值时，坐标 y 的振幅达到最小值，反之亦然.

习题 2　试求平面双摆的微振动(见§5 图 1).

解：对于微振动($\varphi_1 \ll 1, \varphi_2 \ll 1$)，在§5 的习题 1 中得到的拉格朗日函数写

成

$$L=\frac{m_1+m_2}{2}l_1^2\dot{\varphi}_1^2+\frac{m_2}{2}l_2^2\dot{\varphi}_2^2+m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2-\frac{m_1+m_2}{2}gl_1\varphi_1^2-\frac{m_2}{2}gl_2\varphi_2^2.$$

运动方程为

$$(m_1+m_2)l_1\ddot{\varphi}_1+m_2l_2\ddot{\varphi}_2+(m_1+m_2)g\varphi_1=0,$$
$$l_1\ddot{\varphi}_1+l_2\ddot{\varphi}_2+g\varphi_2=0.$$

将(23.6)代入后可得

$$A_1(m_1+m_2)(g-l_1\omega^2)-A_2\omega^2m_2l_2=0,$$
$$-A_1l_1\omega^2+A_2(g-l_2\omega^2)=0.$$

特征方程的根为

$$\omega_{1,2}^2=\frac{g}{2m_1l_1l_2}\{(m_1+m_2)(l_1+l_2)\pm\sqrt{(m_1+m_2)[(m_1+m_2)(l_1+l_2)^2-4m_1l_1l_2]}\}.$$

当 $m_1\to\infty$ 时,频率趋于极限值$\sqrt{g/l_1}$和$\sqrt{g/l_2}$,相应于两个单摆独立振动.

习题 3　试求质点在有心力场 $U=kr^2/2$ 中的运动轨道(称为空间振子).

解:像所有有心力场一样,轨道位于一个平面内,我们取这个平面为 xy 平面.每个坐标 x,y 的变化是频率均为 $\omega=\sqrt{k/m}$ 的简单振动:

$$x=a\cos(\omega t+\alpha),\quad y=b\cos(\omega t+\beta)$$

或者

$$x=a\cos\varphi,\quad y=b\cos(\varphi+\delta)=b\cos\delta\cos\varphi-b\sin\delta\sin\varphi,$$

其中引入了记号 $\varphi=\omega t+\alpha$, $\delta=\beta-\alpha$.由此求出 $\sin\varphi$ 和 $\cos\varphi$ 并由它们的平方和等于 1,可得轨道方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\delta=\sin^2\delta.$$

这是中心在坐标原点的椭圆①.当 $\delta=0$ 或者 $\delta=\pi$ 时轨道退化为直线段.

§ 24　分子振动

如果我们讨论相互作用质点组成的系统,不是处于外场中,则不是所有的自由度都具有振动特性.分子就是一个典型的例子.除了原子在分子内它们的平衡位置附近振动以外,分子整体还作平动和转动.

平动有 3 个自由度,一般情况下,转动也有同样的自由度,所以由 n 个原子组成的分子的$3n$个自由度中,有$3n-6$个相应于振动.所有原子沿着直线排列

① 在势能 $U=kr^2/2$ 的场中质点的轨道是封闭曲线,这个事实在 § 14 中已经提到.

属于特殊情况.既然绕这个直线的转动没有意义,这种情况下转动仅有 2 个自由度,因此振动有 $3n-5$ 个自由度.

在求解分子振动的力学问题时,最好先不考虑平动和转动自由度.

为了消除平动,可以认为分子的总动量等于零.由于这个条件意味着分子的质心不运动,这可以表述为质心的 3 个坐标为常数.设 $\boldsymbol{r}_a=\boldsymbol{r}_{a0}+\boldsymbol{u}_a$(其中 $\boldsymbol{r}_{a0}$是第 a 个原子平衡位置的径矢,而 $\boldsymbol{u}_a$ 是其偏离平衡位置的矢量),我们可将条件

$$\sum m_a\boldsymbol{r}_a=\mathrm{const}\equiv\sum m_a\boldsymbol{r}_{a0}$$

表示为

$$\sum m_a\boldsymbol{u}_a=0. \tag{24.1}$$

为了消除转动,应该令分子的总角动量等于零.因为角动量不是坐标的任何函数对时间的全导数,所以,一般来讲,消除转动的条件不可能表述为是哪个函数等于零的形式.然而,微振动恰好属于特例.事实上,再设 $\boldsymbol{r}_a=\boldsymbol{r}_{a0}+\boldsymbol{u}_a$,略去位移 $\boldsymbol{u}_a$ 的二阶小量,分子的角动量可以写为

$$\boldsymbol{M}=\sum m_a\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{v}_a\approx\sum m_a\boldsymbol{r}_{a0}\times\dot{\boldsymbol{u}}_a=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum m_a\boldsymbol{r}_{a0}\times\boldsymbol{u}_a.$$

在这样的近似下,消除分子转动的条件因此可以写成

$$\sum m_a\boldsymbol{r}_{a0}\times\boldsymbol{u}_a=0 \tag{24.2}$$

(这时坐标原点可以任意选择).

分子简正振动可以根据原子运动特征分类,分类是基于在分子中原子的平衡位置的对称性.为了实现这个目的,有基于群论的一般方法,这将在本教程的另一卷中讲述①.这里我们仅考虑几个初等的例子.

如果分子的所有 n 个原子位于一个平面内,则可以区分原子的面内简正振动和面外简正振动.很容易确定这两种振动的自由度.因为在平面内的运动总共有 $2n$ 个自由度,从中去掉两个平动和一个转动,原子面内简正振动自由度为 $2n-3$.其余的$(3n-6)-(2n-3)=n-3$ 个振动自由度对应于原子的面外振动.

在线性分子情况下,可以区分纵向振动和横向振动.因为 n 个质点沿着直线运动有 n 个自由度,从中去掉一个平动,则纵向振动自由度为 $n-1$.既然线性分子总共有 $3n-5$ 个振动自由度,则有 $2n-4$ 个横向振动自由度.然而,这些 $2n-4$ 个振动仅有 $n-2$ 个不同的频率,这是因为每个振动都可以独立发生在(通过分子轴的)相互垂直的两个平面内,由对称性可知每一对简正振动都有相同的频率.

① 见第三卷,《量子力学(非相对论理论)》,§100,严肃译,喀兴林校.北京:高等教育出版社,2008.

习 题①

习题 1 求线性 3 原子对称分子 ABA（图 28）的振动频率. 假设分子势能仅依赖于距离 $A-B$, $B-A$ 以及角 ABA.

解：根据(24.1)，原子纵向位移 x_1, x_2, x_3 满足关系

$$m_A(x_1+x_3)+m_B x_2=0.$$

利用此式，从分子纵向运动的拉格朗日函数

$$L=\frac{m_A}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_3^2)+\frac{m_B}{2}\dot{x}_2^2-\frac{k_1}{2}[(x_1-x_2)^2+(x_3-x_2)^2]$$

中消去 x_2，然后引入新坐标

$$Q_a=x_1+x_3,\quad Q_s=x_1-x_3.$$

于是可得

$$L=\frac{m_A\mu}{4m_B}\dot{Q}_a^2+\frac{m_A}{4}\dot{Q}_s^2-\frac{k_1\mu^2}{4m_B^2}Q_a^2-\frac{k_1}{4}Q_s^2$$

其中 $\mu=2m_A+m_B$ 是分子的质量. 由此可见，Q_a 和 Q_s 是简正坐标（精确到相差归一化系数）. 坐标 Q_a 对应着相对分子中心的反对称振动（$x_1=x_3$，图 28a），其频率为

$$\omega_a=\sqrt{\frac{k_1\mu}{m_A m_B}}.$$

坐标 Q_s 对应着对称振动（$x_1=-x_3$，图 28b），频率为

$$\omega_{s1}=\sqrt{\frac{k_1}{m_A}}.$$

根据(24.1)和(24.2)，原子横向位移 y_1, y_2, y_3 满足关系

$$m_A(y_1+y_3)+m_B y_2=0,\quad y_1=y_3,$$

（对称弯曲振动，图 28c）. 分子弯曲势能写成 $k_2l^2\delta^2/2$，其中 δ 是角 ABA 偏离 π 的大小，可以用位移表示为

$$\delta=\frac{1}{l}[(y_1-y_2)+(y_3-y_2)].$$

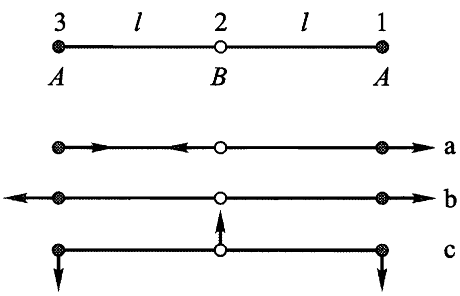


图 28

① 更复杂的分子振动计算可参见：М. В. Волькенштейн, М. А. Ельяшевич, Б. И. Степанов. Колебания молекул. – М.: Гостехиздат, 1949; Г. Герцберг, Колебательные и вращательные спектры многоатомных молекул. – М.: ИЛ, 1949.（其中第二篇文献原是英文的，也有中译本：Herzberg G. Molecular spectra and molecular structure: Infrared and Raman spectra of polyatomic molecules. New York: Van Nostrand, 1945. 中译本：赫兹堡 G. 分子光谱与分子结构（第二卷）：多原子分子的红外光谱与拉曼光谱. 王鼎昌译. 北京：科学出版社，1986.）

将所有的位移 y_1, y_2, y_3 用 δ 表示,可得分子横向振动的拉格朗日函数

$$L=\frac{m_A}{2}(\dot{y}_1^2+\dot{y}_3^2)+\frac{m_B}{2}\dot{y}_2^2-\frac{k_2 l^2}{2}\delta^2=\frac{m_A m_B}{4\mu}l^2\dot{\delta}^2-\frac{k_2 l^2}{2}\delta^2,$$

由此得频率

$$\omega_{s2}=\sqrt{\frac{2k_2\mu}{m_A m_B}}.$$

习题 2 同上题,但分子 ABA 的形状为三角形(图 29).

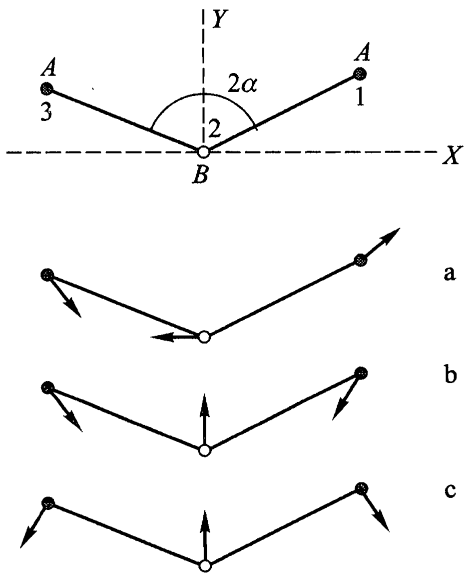


图 29

解:根据(24.1)和(24.2),原子位移 $\boldsymbol{u}$ 在 X 和 Y 方向的分量满足关系

$$m_A(x_1+x_3)+m_B x_2=0,$$

$$m_A(y_1+y_3)+m_B y_2=0,$$

$$(y_1-y_3)\sin\alpha-(x_1+x_3)\cos\alpha=0.$$

利用矢量 $\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2$ 和 $\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{u}_2$ 在直线 AB 和 BA 方向上投影,可得距离 $A-B$ 和 $B-A$ 的变化量 δl_1 和 δl_2 如下

$$\delta l_1=(x_1-x_2)\sin\alpha+(y_1-y_2)\cos\alpha,$$

$$\delta l_2=-(x_3-x_2)\sin\alpha+(y_3-y_2)\cos\alpha.$$

将这两个矢量向垂直于直线 AB 和 BA 方向上投影,可得角 ABA 的改变量

$$\delta=\frac{1}{l}[(x_1-x_2)\cos\alpha-(y_1-y_2)\sin\alpha]+\frac{1}{l}[-(x_3-x_2)\cos\alpha-(y_3-y_2)\sin\alpha].$$

分子的拉格朗日函数为

$$L=\frac{m_A}{2}(\dot{\boldsymbol{u}}_1^2+\dot{\boldsymbol{u}}_3^2)+\frac{m_B}{2}\dot{\boldsymbol{u}}_2^2-\frac{k_1}{2}(\delta l_1^2+\delta l_2^2)-\frac{k_2 l^2}{2}\delta^2.$$

引入新坐标

$$Q_a = x_1 + x_3, \quad q_{s1} = x_1 - x_3, \quad q_{s2} = y_1 + y_3.$$

将矢量 $\boldsymbol{u}$ 的分量用这些新坐标表示

$$x_1 = \frac{1}{2}(Q_a + q_{s1}), \quad x_3 = \frac{1}{2}(Q_a - q_{s1}), \quad x_2 = -\frac{m_A}{m_B}Q_a,$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(q_{s2} + Q_a\cot\alpha), \quad y_3 = \frac{1}{2}(q_{s2} - Q_a\cot\alpha), \quad y_2 = -\frac{m_A}{m_B}q_{s2},$$

计算后可得拉格朗日函数

$$L = \frac{m_A}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\dot{Q}_a^2 + \frac{m_A}{4}\dot{q}_{s1}^2 + \frac{m_A\mu}{4m_B}\dot{q}_{s2}^2 -$$

$$Q_a^2\frac{k_1}{4}\left(\frac{2m_A}{m_B} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\left(1 + \frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right) - \frac{q_{s1}^2}{4}(k_1\sin^2\alpha + 2k_2\cos^2\alpha) -$$

$$q_{s2}^2\frac{\mu^2}{4m_B^2}(k_1\cos^2\alpha + 2k_2\sin^2\alpha) + q_{s1}q_{s2}\frac{\mu}{2m_B}(2k_2 - k_1)\sin\alpha\cos\alpha.$$

由此可见,坐标 Q_a 对应于频率为

$$\omega_a^2 = \frac{k_1}{m_A}\left(1 + \frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right)$$

的相对于 Y 轴的反对称简正振动($x_1 = x_3, y_1 = -y_3$,图 29a).

坐标 q_{s1}, q_{s2} 对应于两个振动(相对 Y 轴对称:$x_1 = -x_3, y_1 = y_3$,图 29b 和 29c),其频率 ω_{s1}, ω_{s2} 是二次(ω^2)特征方程

$$\omega^4 - \omega^2\left[\frac{k_1}{m_A}\left(1 + \frac{2m_A}{m_B}\cos^2\alpha\right) + \frac{2k_2}{m_A}\left(1 + \frac{2m_A}{m_B}\sin^2\alpha\right)\right] + \frac{2\mu k_1 k_2}{m_B m_A^2} = 0$$

的根. 当 $2\alpha = \pi$ 时,所有这些频率与习题 1 中得到的相同.

习题 3 同习题1,但分子 ABC 是线性非对称的(图 30).

解:原子纵向位移(x)和横向位移(y)之间的关系为

$$m_A x_1 + m_B x_2 + m_C x_3 = 0,$$

$$m_A y_1 + m_B y_2 + m_C y_3 = 0,$$

$$m_A l_1 y_1 = m_C l_2 y_3.$$

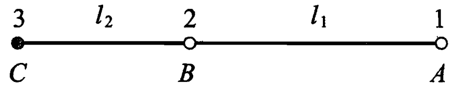


图 30

拉伸和弯曲势能为

$$\frac{k_1}{2}(\delta l_1)^2 + \frac{k_1'}{2}(\delta l_2)^2 + \frac{k_2 l^2}{2}\delta^2$$

其中 $2l = l_1 + l_2$. 类似习题 1,计算可得横向振动频率

$$\omega_t^2 = \frac{k_2 l^2}{l_1^2 l_2^2}\left(\frac{l_1^2}{m_C} + \frac{l_2^2}{m_A} + \frac{4l^2}{m_B}\right),$$

两个纵向振动频率 ω_{l1}, ω_{l2} 满足二次(ω^2)特征方程

$$\omega^4-\omega^2\left[k_1\left(\frac{1}{m_A}+\frac{1}{m_B}\right)+k_1'\left(\frac{1}{m_B}+\frac{1}{m_C}\right)\right]+\frac{\mu k_1k_1'}{m_Am_Bm_C}=0.$$

§ 25 阻尼振动

到现在为止,我们都是假设物体的运动发生在真空中或者周围介质对运动的影响可以忽略.实际上,物体在介质中运动时,介质会产生阻力使运动有减慢的趋势.这时运动物体的能量不断转化为热能而最终耗散完.

在这种情况下运动过程已不再是纯力学过程,需要考虑介质自身的运动,以及物体和介质的内部热状态.特别是,一般情况下不能认为,运动物体的加速度仅仅是给定时刻的坐标和速度的函数,即不存在这种力学意义上的运动方程了.因此,在介质中物体的运动问题已经不是力学问题.

然而,存在一些情况,在介质中的运动可以近似地用力学运动方程描述,这需要在方程中引入某些附加项.如果振动频率小于在介质内耗散过程的频率,则属于这种情况.当满足这样的条件时,可以认为在物体上作用了仅依赖于速度的摩擦力(对于给定的均匀介质).

此外,如果速度足够小,可以将摩擦力按速度的幂次展开.因为在静止物体上没有任何摩擦力作用,所以零次项为零.不为零的第一项与速度成正比.于是,作用在广义坐标为 x 的一维微振动系统的广义摩擦力 f_{fr} 可以写成

$$f_{\mathrm{fr}}=-\alpha\dot{x},$$

其中 α 为正的系数,负号表示力的方向与速度方向相反.将这个力加到运动方程(见(21.4))的右端,可得(参见(21.4))

$$m\ddot{x}=-kx-\alpha\dot{x}. \tag{25.1}$$

除以 m 并引入记号

$$\frac{k}{m}=\omega_0^2,\quad \frac{\alpha}{m}=2\lambda. \tag{25.2}$$

ω_0 是没有摩擦力时系统自由振动的频率.λ 称为阻尼系数①,或阻尼衰减率.

于是,我们有方程

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=0. \tag{25.3}$$

根据求解常系数线性微分方程的一般方法,假设 $x=\mathrm{e}^{rt}$ 可得关于 r 的特征方程

$$r^2+2\lambda r+\omega_0^2=0.$$

方程(25.3)的通解为:

$$x=c_2\mathrm{e}^{r_1t}+c_2\mathrm{e}^{r_2t},\qquad r_{1,2}=-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}.$$

① 无量纲乘积 λT(其中 $T=2\pi/\omega$ 是周期)称为对数阻尼衰减率.

下面分两种情况讨论.

如果 $\lambda<\omega_0$,则 r 有两个共轭复值.运动方程的通解可以写成

$$x=\mathrm{Re}\left\{A\exp\left(-\lambda t+\mathrm{i}t\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\right)\right\},$$

其中 A 是任意复常数.也可以写成

$$x=a\mathrm{e}^{-\lambda t}\cos(\omega t+\alpha),\quad \omega=\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}, \tag{25.4}$$

其中 a 和 α 是实常数.这些公式表示的运动称为*阻尼振动*.可以看作是振幅按指数规律衰减的简谐振动.振幅衰减率由指数 λ 确定,振动"频率"ω 小于无摩擦力时自由振动的频率.当 $\lambda\ll\omega_0$ 时,ω 和 ω_0 之间的差别是二阶小量.由于摩擦总是阻碍运动,故有摩擦力时频率减小是所预期的.

如果 $\lambda\ll\omega_0$,则在一个周期 $2\pi/\omega$ 之内阻尼振动的振幅几乎不变.这时研究坐标平方与速度平方的(一个周期内)的平均值很有意义,取平均时忽略乘子 $\mathrm{e}^{-\lambda t}$ 的变化,这两个平均值显然与 $\mathrm{e}^{-2\lambda t}$ 成正比.所以系统的平均能量衰减规律为

$$\overline{E}=E_0\mathrm{e}^{-2\lambda t}, \tag{25.5}$$

其中 E_0 是能量的初值.

现在假设 $\lambda>\omega_0$.那么 r 的两个值都是实数,并且两个都是负数.通解可写成

$$x=c_1\exp\left[-\left(\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)t\right]+c_2\exp\left[-\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)t\right]. \tag{25.6}$$

可见,在这种摩擦力足够大的情况下,运动 $|x|$ 单调递减,即(当 $t\to\infty$ 时)渐近地趋近于平衡位置.这种类型的运动称为*非周期阻尼*.

最后,在 $\lambda=\omega_0$ 的特殊情况下,特征方程有一个二重根为 $r=-\lambda$.这时运动方程的通解为

$$x=(c_1+c_2t)\mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{25.7}$$

这是非周期阻尼的特殊情况.

对于多自由度系统,相应于广义坐标 x_i 的广义摩擦力是如下形式的速度的线性函数

$$f_{i\mathrm{fr}}=-\sum_k\alpha_{ik}\dot{x}_k. \tag{25.8}$$

从纯粹的力学角度考虑,无法得出系数 α_{ik} 对下标 i 和 k 的对称性结论.但是,用统计物理的方法可以证明,在所有情况下①

$$\alpha_{ik}=\alpha_{ki}. \tag{25.9}$$

故公式(25.8)可以写成导数形式

$$f_{i\mathrm{fr}}=-\frac{\partial F}{\partial\dot{x}_i}, \tag{25.10}$$

① 参见第五卷,《统计物理学Ⅰ》,§121.

其中 F 是二次型

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\alpha_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k \tag{25.11}$$

称为耗散函数.

在拉格朗日方程的右端加入力(25.10),得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}. \tag{25.12}$$

耗散函数自身有重要的物理意义,它决定了系统中能量耗散的速率.这很容易证明,只要计算系统机械能对时间的导数即可.我们有

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \dot{x}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L\right) = \sum_i \dot{x}_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right) = -\sum_i \dot{x}_i\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}.$$

由于 F 是速度的二次函数,根据欧拉齐次函数定理,上式右端的和等于 $2F$.于是

$$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = -2F, \tag{25.13}$$

即系统能量变化率等于 2 倍耗散函数.因为耗散过程会导致能量损失,总是有 $F>0$,即二次型(25.11)是正定的.

将力(25.8)加入方程(23.5)的右端,可得存在摩擦力时微振动的方程

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k + \sum_k k_{ik}x_k = -\sum_k \alpha_{ik}\dot{x}_k. \tag{25.14}$$

在这些方程中令

$$x_k = A_k \mathrm{e}^{rt},$$

约去 e^{rt}后可得常数 A_k 满足的线性代数方程组

$$\sum_k (m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik})A_k = 0. \tag{25.15}$$

令行列式等于零可得特征方程

$$|m_{ik}r^2 + \alpha_{ik}r + k_{ik}| = 0, \tag{25.16}$$

可求得可能的 r 值.

这是 r 的 $2s$ 阶方程.因为所有系数都是实数,方程的根或者是实数,或者是复共轭对.实根一定是负数,复根的实部一定是负的.否则坐标和速度以及系统的能量都会随着时间指数增加,但耗散力应该使能量减小.

§26 有摩擦的强迫振动

研究有摩擦时的强迫振动类似于§22 研究无摩擦振动.这里我们将详细研究非常有意义的周期强迫力情况.

在方程(25.1)的右端加入外力 $f\cos\gamma t$ 并除以 m,可得运动方程

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{f}{m}\cos\gamma t.\tag{26.1}$$

求解这个方程用复数形式更方便,为此在右端用 $e^{i\gamma t}$ 代替 $\cos\gamma t$:

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{f}{m}e^{i\gamma t}.$$

我们求 $x=Be^{i\gamma t}$ 形式的特解,对于 B 有

$$B=\frac{f}{m(\omega_0^2-\gamma^2+2i\lambda\gamma)}.\tag{26.2}$$

将 B 写成 $be^{i\delta}$ 的形式,对于 b 和 δ 有

$$b=\frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2}},\quad \tan\delta=\frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2-\omega_0^2}.\tag{26.3}$$

最后,将表达式 $Be^{i\gamma t}=be^{i(\gamma t+\delta)}$ 的实部取出来,可得方程(26.1)的特解,再加上其相应的齐次方程的通解(为确定起见,我们给出 $\omega_0>\lambda$ 的情况),最终得

$$x=ae^{-\lambda t}\cos(\omega t+\alpha)+b\cos(\gamma t+\delta).\tag{26.4}$$

第一项随时间指数衰减,因而经过足够长时间后只剩下第二项:

$$x=b\cos(\gamma t+\delta).\tag{26.5}$$

强迫振动的振幅 b 的表达式(26.3)在 γ 趋近 ω_0 时也增大,但是不会像无摩擦力共振那样趋向无穷.对于给定的力幅值 f,在 $\gamma=\sqrt{\omega_0^2-2\lambda^2}$ 时振动的振幅最大.当 $\lambda\ll\omega_0$ 时,这个值与 ω_0 之差是二阶小量.

我们研究接近共振的区域.设 $\gamma=\omega_0+\varepsilon$,其中 ε 是小量,我们又假设 $\lambda\ll\omega_0$.那么在(26.2)中可以做近似替换

$$\gamma^2-\omega_0^2=(\gamma+\omega_0)(\gamma-\omega_0)\approx2\omega_0\varepsilon,\quad 2i\lambda\gamma\approx2i\lambda\omega_0,$$

因此

$$B=-\frac{f}{2m(\varepsilon-i\lambda)\omega_0}\tag{26.6}$$

或者

$$b=\frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2+\lambda^2}},\quad \tan\delta=\frac{\lambda}{\varepsilon}.\tag{26.7}$$

我们研究当强迫力频率改变时,振动与强迫力之间的相位差 δ 的变化特点.这个差总是负的,即振动"落后"于外力.当从 $\gamma<\omega_0$ 一侧远离共振时,则 δ 趋于零,如果从 $\gamma>\omega_0$ 一侧远离时,则 δ 趋于 $-\pi$.在接近 ω_0 的狭窄区域(宽度为 λ 的量级)内,δ 从零变化为 $-\pi$,当 $\gamma=\omega_0$ 时相位差 δ 经过 $-\pi/2$.我们发现,无摩擦力时强迫振动相位在 $\gamma=\omega_0$ 时产生量值 π 的突变((22.4)的第二项改变符号),考虑摩擦力时就"消除"了这个突变.

当系统的强迫振动处于稳定运动(26.5)时,系统的能量保持不变.这时系统

不断(从外力源)吸收能量,又因摩擦而耗散掉.我们用外力频率的函数 $I(\gamma)$表示单位时间内平均吸收的能量.根据(25.13)有

$$I(\gamma)=2\overline{F},$$

其中 $\overline{F}$ 是耗散函数(对振动周期)的平均值.对于一维运动,耗散函数的表达式(25.11)写成 $F=\alpha\dot{x}^2/2=\lambda m\dot{x}^2$.将(26.5)代入得

$$F=\lambda\ mb^2\gamma^2\sin^2(\gamma t+\delta).$$

正弦的平方对时间的平均值为 1/2,所以

$$I(\gamma)=\lambda\ mb^2\gamma^2. \tag{26.8}$$

在共振附近,代入振幅(26.7)得

$$I(\varepsilon)=\frac{f^2}{4m}\frac{\lambda}{\varepsilon^2+\lambda^2}. \tag{26.9}$$

能量吸收对频率的这种依赖关系称为色散.在某个 ε 值时 $I(\varepsilon)$等于 $\varepsilon=0$ 时的最大值的一半,则$|\varepsilon|$称为共振曲线(图 31)的半宽度.由公式(26.9)可知,在现在的情况下,这个半宽度等于阻尼系数 λ.曲线最大值的高度

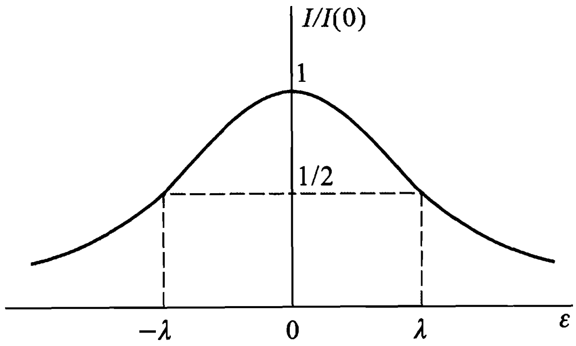


图 31

$$I(0)=\frac{f^2}{4m\lambda}$$

与 λ 成反比.因此,随着阻尼系数减小,共振曲线变得更窄更高,即峰值更大.但这时共振曲线下面的面积不变.这个面积由积分

$$\int_0^\infty I(\gamma)\mathrm{d}\gamma=\int_{-\omega_0}^\infty I(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon$$

给出.因为 $I(\varepsilon)$在$|\varepsilon|$增大时迅速减小,$|\varepsilon|$很大的区域无关紧要,可以在积分时将 $I(\varepsilon)$取为(26.9)的形式,积分下限换为 $-\infty$.那么

$$\int_{-\infty}^\infty I(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=\frac{f^2\lambda}{4m}\int_{-\infty}^\infty\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\varepsilon^2+\lambda^2}=\frac{\pi f^2}{4m}. \tag{26.10}$$

习　　题

习题　试求外力 $f=f_0\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\gamma t$ 作用下有摩擦的强迫振动.

解:我们求解复数形式的运动方程

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{f_0}{m}\mathrm{e}^{\alpha t+\mathrm{i}\gamma t},$$

然后取解的实部.结果可得如下形式的强迫振动

$$x=b\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\gamma t+\delta),$$

其中

$$b=\frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0^2+\alpha^2-\gamma^2+2\alpha\lambda)^2+4\gamma^2(\alpha+\lambda)^2}},\qquad \tan\delta=-\frac{2\gamma(\alpha+\lambda)}{\omega_0^2+\alpha^2-\gamma^2+2\alpha\lambda}.$$

§ 27 参变共振

存在一种非封闭振动系统,外力的作用可以归结为其参数随时间的变化①.

一维系统的拉格朗日函数(21.3)中的参数是 m 和 k,如果它们依赖于时间,则运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x})+kx=0. \tag{27.1}$$

用新的独立变量 τ 代替 t,使得 $\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}t/m(t)$,则方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}+mkx=0.$$

因此,不失一般性,研究下面形式的方程就足够了

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2(t)x=0. \tag{27.2}$$

这个方程可以由(27.1)中令 $m=\mathrm{const}$ 得到.

函数 $\omega(t)$的形式由问题的条件决定.假设这个函数是频率为 γ,周期为 $T=2\pi/\gamma$ 的周期函数,这就是说,

$$\omega(t+T)=\omega(t),$$

因而方程(27.2)在变换 $t\to t+T$ 下保持不变.由此可知,如果 $x(t)$是方程的解,则函数 $x(t+T)$也是解.换句话说,如果 $x_1(t)$和 $x_2(t)$是方程(27.2)的两个独立的解,则变量替换 $t\to t+T$ 后这两个函数必定变换为它们自身的线性叠加.这种情况下可以选择 x_1 和 x_2 使得变量替换 $t\to t+T$ 的结果仅是原函数乘以常数②

$$x_1(t+T)=\mu_1x_1(t),\quad x_2(t+T)=\mu_2x_2(t).$$

具有这种性质的函数的一般形式为

$$x_1(t)=\mu_1^{t/T}\Pi_1(t),\qquad x_2(t)={\mu_2}^{t/T}\Pi_2(t). \tag{27.3}$$

---

① 一个简单的例子是单摆,其悬挂点在竖直方向上按给定周期规律运动(见习题 3).

② 这种选择等价于将 $x_1(t)$和 $x_2(t)$的线性变换矩阵化为对角化的形式,这需要求解相应的二次特征方程.我们假设这个方程没有重根.

其中 $\Pi_1(t)$和 $\Pi_2(t)$仅仅是时间的周期函数(周期为 T).

这些函数中的常数 μ_1 和 μ_2 应该满足确定的关系.事实上,将方程

$$\ddot{x}_1+\omega^2(t)x_1=0, \quad \ddot{x}_2+\omega^2(t)x_2=0$$

分别乘以 x_2 和 x_1,相减后可得

$$\ddot{x}_1x_2-\ddot{x}_2x_1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}_1x_2-\dot{x}_2x_1)=0$$

或者

$$\dot{x}_1x_2-\dot{x}_2x_1=\text{const}. \tag{27.4}$$

然而,对任何形如(27.3)的函数 $x_1(t)$和 $x_2(t)$,在 t 变为 $t+T$ 时,(27.4)左边的表达式乘以 $\mu_1\mu_2$.所以很清楚,为了使等式(27.4)在任何条件下成立,必须有

$$\mu_1\mu_2=1. \tag{27.5}$$

从方程(27.2)的系数为实数的事实出发,可以得到关于常数 μ_1,μ_2 的其它结论.如果 $x(t)$是方程(27.2)的某个解,则其复共轭函数$x^*(t)$也满足该方程.由此可知,常数 μ_1,μ_2 应该与另一对常数 μ_1^*,μ_2^* 相同,即 $\mu_1=\mu_2^*$ 或者 μ_1,μ_2 都是实数.在第一种情况下,考虑到(27.5),有 $\mu_1=1/\mu_1^*$,即$|\mu_1|^2=|\mu_2|^2=1$.常数 μ_1 和 μ_2 的模都等于 1.

在第二种情况下,方程(27.2)的两个独立解的形式为

$$x_1(t)=\mu^{t/T}\Pi_1(t), \quad x_2(t)=\mu^{-t/T}\Pi_2(t), \tag{27.6}$$

并且 μ 是模$|\mu|$不为 1 的正实数或者负实数.这些函数之一(视$|\mu|>1$ 或$|\mu|<1$ 而为函数 $x_1(t)$或 $x_2(t)$)随时间指数增长.这就是说,系统在平衡位置 $x=0$ 的静止状态不稳定:偏离这个状态任意小量,都会使出现的位移 x 随时间快速增长.这种现象称为*参变共振*.

应该注意的是,当 x 和$\dot{x}$的初值严格等于零时,它们以后也等于零,这不同于通常的共振(§22).在通常共振情况下,即使从零初始值出发位移也会随时间增长(正比于 t).

下面我们确定一种重要的情况中发生参变共振的条件,函数 $\omega(t)$与常数 ω_0 相差很小,并且是简单周期函数

$$\omega^2(t)=\omega_0^2(1+h\cos\gamma t), \tag{27.7}$$

其中常数 $h\ll1$(可以假定 h 是正数,这是因为总可以通过适当地选择时间起点来实现).下面将会看到,如果函数 $\omega(t)$的频率 γ 接近两倍的 ω_0,则参变共振最强烈.所以假设

$$\gamma=2\omega_0+\varepsilon,$$

其中 $\varepsilon\ll\omega_0$.

求解运动方程①

$$\ddot{x}+\omega_0^2[1+h\cos(2\omega_0+\varepsilon)t]x=0 \tag{27.8}$$

时，我们假设解的形式为

$$x=a(t)\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+b(t)\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t, \tag{27.9}$$

其中 $a(t)$和 $b(t)$是随时间变化很慢(与 cos 和 sin 相比)的函数.解的这个形式自然不是精确的.事实上，函数 $x(t)$也包括与 $\omega_0+\varepsilon/2$ 相差为 $2\omega_0+\varepsilon$ 的整数倍这样的频率项.然而，这些项是 h 的高阶小量，在一阶近似中可以忽略(参见习题 1).

将(27.9)代入(27.8)，仅保留 ε 的一阶项，这时假设$\dot{a}\sim\varepsilon a$， $\dot{b}\sim\varepsilon b$，这个假设在共振条件下的正确性由结果得到确证.将三角函数的乘积展开为三角函数之和，如

$$\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\cdot\cos(2\omega_0+\varepsilon)t=\frac{1}{2}\cos\left(3\omega_0+\frac{3\varepsilon}{2}\right)t+\frac{1}{2}\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

等等，按照上面所述，我们略去频率为 $3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)$的项，结果可得

$$-\left(2\dot{a}+b\varepsilon+\frac{h\omega_0}{2}b\right)\omega_0\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\left(2\dot{b}-a\varepsilon+\frac{h\omega_0}{2}a\right)\omega_0\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t=0.$$

这个等式成立要求 sin 和 cos 的系数都等于零.由此可得函数 $a(t)$和 $b(t)$的两个线性微分方程.通常，我们来求这两个方程的正比于 e^{st}的解.于是有

$$sa+\frac{1}{2}\left(\varepsilon+\frac{h\omega_0}{2}\right)b=0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon-\frac{h\omega_0}{2}\right)a-sb=0,$$

这两个代数方程的相容条件给出

$$s^2=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2-\varepsilon^2\right]. \tag{27.10}$$

发生参变共振的条件是 s 为实数，即 $s^2>0$②.可见，参变共振发生在频率 $2\omega_0$ 两侧的区间③

$$-\frac{h\omega_0}{2}<\varepsilon<\frac{h\omega_0}{2}. \tag{27.11}$$

这个区间的宽度与 h 成正比，振动放大系数 s 在该区间的值也是h 量级的.

---

① 这种形式的方程(γ 和 h 是任意的)在数学物理中称为马蒂厄(Mathieu)方程.

② 在(27.6)中的常数 μ 与 s 的关系是 $\mu=-e^{s\pi/\omega_0}$(当 t 替换为 $t+2\pi/2\omega_0$ 时，在(27.9)中的 sin 和 cos 改变符号).

③ 如果只对共振的区间感兴趣，而对区间内 s 的值不感兴趣，则计算可以简化，只要注意到在区间的边界上 $s=0$，即(27.9)中系数 a 和b 为常数，这立即给出(27.11)中的边界 $\varepsilon=\pm h\omega_0/2$.

在系统参量变化,频率 γ 接近 $2\omega_0/n$(n 为任意整数)情况下,也会发生参变共振.但共振区间(不稳定区间)的宽度随 n 的增加像 h^n 那样迅速减小(见习题 2 的脚注).振动的放大系数也同样减小.

在系统存在微弱摩擦时,也存在参变共振现象,但不稳定区间变得有点更窄.在§25 中我们已经看到,摩擦使振幅按 $e^{-\lambda t}$ 的规律减小.所以参变共振时振动像 $e^{(s-\lambda)t}$一样放大(正数 s 由无摩擦情况的解给定),不稳定区间的边界由等式 $s-\lambda=0$ 确定.于是,利用(27.10)中的 s,代替(27.11)我们可得共振区间

$$-\sqrt{(h\omega_0/2)^2-4\lambda^2}<\varepsilon<\sqrt{(h\omega_0/2)^2-4\lambda^2}. \qquad (27.12)$$

注意到,这时不是对于任意小的振幅 h 都能发生共振,而是必须大于一个确定的"阈值"h_k,当(27.12)成立时,

$$h_k=\frac{4\lambda}{\omega_0}.$$

可以证明,对于接近频率 $2\omega_0/n$ 的共振,阈值 h_k 正比于 $\lambda^{1/n}$,即随着 n 增加.

习 题

习题 1 试求在 $\gamma=2\omega_0$ 附近共振的不稳定区间边界,精确到 h^2 量级.

解:设方程(27.8)的解形式为

$$x=a_0\cos(\omega_0+\varepsilon/2)t+b_0\sin(\omega_0+\varepsilon/2)t+$$
$$a_1\cos3(\omega_0+\varepsilon/2)t+b_1\sin3(\omega_0+\varepsilon/2)t,$$

这里考虑了 h 的更高阶项(与(27.9)比较).我们只对不稳定区间的边界感兴趣,假设系数 a_0,b_0,a_1,b_1 是常数(相应于在上一个脚注里提到的),在代入方程(27.8)时,将三角函数之积化为三角函数之和,略去频率为 $5(\omega_0+\varepsilon/2)$ 的项,这些项在更高阶近似中才需要.于是我们有

$$\left[-a_0\left(\omega_0\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)+\frac{h\omega_0^2}{2}a_0+\frac{h\omega_0^2}{2}a_1\right]\cos\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$
$$\left[-b_0\left(\omega_0\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)-\frac{h\omega_0^2}{2}b_0+\frac{h\omega_0^2}{2}b_1\right]\sin\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+$$
$$\left[\frac{h\omega_0^2}{2}a_0-8\omega_0^2a_1\right]\cos3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\left[\frac{h\omega_0^2}{2}b_0-8\omega_0^2b_1\right]\sin3\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t=0.$$

在频率为 $\omega_0+\varepsilon/2$ 的项中保留一阶和二阶小量,但在频率为 $3(\omega_0+\varepsilon/2)$ 的那些项中仅保留一阶小量.每个方括号内的表达式都应该分别等于零.由后面两个方括号可得

$$a_1=\frac{h}{16}a_0,\quad b_1=\frac{h}{16}b_0,$$

然后再由前两个方括号可得

$$\omega_0\varepsilon\pm\frac{h\omega_0^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4}-\frac{h^2\omega_0^2}{32}=0.$$

求解这个方程,精确到 h^2 量级,我们可得不稳定区间边界的 ε 值:

$$\varepsilon=\pm\frac{h\omega_0}{2}-\frac{h^2\omega_0}{32}.$$

习题 2 试求在 $\gamma=\omega_0$ 附近共振的不稳定区间边界.

解:令 $\gamma=\omega_0+\varepsilon$,可得运动方程

$$\ddot{x}+\omega_0^2[1+h\cos(\omega_0+\varepsilon)t]x=0.$$

注意到所求边界值 $\varepsilon\sim h^2$,我们求如下形式的解:

$x=a_0\cos(\omega_0+\varepsilon)t+b_0\sin(\omega_0+\varepsilon)t+a_1\cos2(\omega_0+\varepsilon)t+b_1\sin2(\omega_0+\varepsilon)t+c_1$,

在此式中同时考虑了前两阶项.为了求不稳定区间边界,我们再次假定系数都是常数,得

$$\left[-2\omega_0\varepsilon a_0+\frac{h\omega_0^2}{2}a_1+h\omega_0^2c_1\right]\cos(\omega_0+\varepsilon)t+\left[-2\omega_0\varepsilon b_0+\frac{h\omega_0^2}{2}b_1\right]\sin(\omega_0+\varepsilon)t+$$
$$\left[-3\omega_0^2a_1+\frac{h\omega_0^2}{2}a_0\right]\cos2(\omega_0+\varepsilon)t+\left[-3\omega_0^2b_1+\frac{h\omega_0^2}{2}b_0\right]\sin2(\omega_0+\varepsilon)t+$$
$$\left[\omega_0^2c_1+\frac{h\omega_0^2}{2}a_0\right]=0.$$

由此可得

$$a_1=\frac{h}{6}a_0,\quad b_1=\frac{h}{6}b_0,\quad c_1=-\frac{h}{2}a_0,$$

于是可得不稳定边界①:

$$\varepsilon=-\frac{5}{24}h^2\omega_0,\quad \varepsilon=\frac{1}{24}h^2\omega_0.$$

习题 3 设平面摆的悬挂点在竖直方向上振动,试求此平面摆微振动的参变共振条件.

解:根据§5 的习题 3 求得的拉格朗日函数,微振动($\varphi\ll1$)的运动方程为

$$\ddot{\varphi}+\omega_0^2\left[1+4\frac{a}{l}\cos(2\omega_0+\varepsilon)t\right]\varphi=0,$$

其中 $\omega_0^2=g/l$.由此可见,$4a/l$ 起着正文中小参数 h 的作用.条件(27.11)例如,取如下形式:

$$|\varepsilon|<\frac{2a\sqrt{g}}{l^{3/2}}.$$

---

① 一般地,在频率 $2\omega_0/n$ 附近共振的不稳定区间的宽度 $\Delta\varepsilon$ 由下式给出

$$\Delta\varepsilon=n^{2n-3}h^n\omega_0/2^{3(n-1)}[(n-1)!]^2,$$

该结果是贝尔得到的(Bell M. Proceedings of the Glasgow Mathematical Association, 1957, 3:132)——英译本注

§ 28 非简谐振动

此前讨论的整个微振动理论建立在系统的势能和动能分别用坐标和速度展开并仅保留到它们的二阶项的基础上,这时运动方程是线性的,在这种近似下研究线性振动.尽管在振幅足够小的条件下这种近似是合理的,然而,考虑更高阶的近似(称为非简谐振动或者非线性振动)会出现运动的某些次要的,但定性来看完全不同的性质.

我们将拉格朗日函数展开至3阶项.这时势能中出现坐标 x_i 的3阶项,在动能中出现速度和坐标的形如$\dot{x}_i\dot{x}_kx_l$ 的乘积项.与表达式(23.3)的这种差别是由于在函数$a_{ik}(q)$的展开式中保留了 x 的一阶项.于是,拉格朗日函数的形式为

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k-k_{ik}x_ix_k)+\frac{1}{2}\sum_{i,k,l}n_{ikl}\dot{x}_i\dot{x}_kx_l-\frac{1}{3}\sum_{i,k,l}l_{ikl}x_ix_kx_l,\tag{28.1}$$

其中 n_{ikl},l_{ikl}是新的常系数.

如果从任意坐标 x_i 变换到线性近似下的简正坐标 Q_α,则由于变换是线性的,(28.1)的第3和第4个和变为类似的和,其中坐标 x_i 和速度$\dot{x}_i$ 将被 Q_α 和 $\dot{Q}_\alpha$ 代替.我们将这些新的和的系数用 $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$和 $\mu_{\alpha\beta\gamma}$表示,拉格朗日函数可写成

$$L=\frac{1}{2}\sum_{\alpha}(\dot{Q}_\alpha^2-\omega_\alpha^2Q_\alpha^2)+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\lambda_{\alpha\beta\gamma}\dot{Q}_\alpha\dot{Q}_\beta Q_\gamma-\frac{1}{3}\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\mu_{\alpha\beta\gamma}Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma.\tag{28.2}$$

我们不想完整地写出由这个拉格朗日函数导出的运动方程.这些方程的重要特点是它们具有形式

$$\ddot{Q}_\alpha+\omega_\alpha^2Q_\alpha=f_\alpha(Q,\dot{Q},\ddot{Q}),\tag{28.3}$$

其中 f_α 是坐标 Q 及其对时间导数的二次齐次函数.

利用逐阶近似的方法,我们求这些方程的如下形式的解:

$$Q_\alpha=Q_\alpha^{(1)}+Q_\alpha^{(2)},\tag{28.4}$$

其中 $Q_\alpha^{(2)}\ll Q_\alpha^{(1)}$,函数 $Q_\alpha^{(1)}$ 满足"无扰"方程

$$\ddot{Q}_\alpha^{(1)}+\omega_\alpha^2Q_\alpha^{(1)}=0,$$

即为通常的简谐振动

$$Q_\alpha^{(1)}=a_\alpha\cos(\omega_\alpha t+\alpha_\alpha).\tag{28.5}$$

在高一阶近似中,在(28.3)右端只保留到二阶项,可得 $Q_\alpha^{(2)}$ 的方程

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)}+\omega_\alpha^2Q_\alpha^{(2)}=f_\alpha(Q^{(1)},\dot{Q}^{(1)},\ddot{Q}^{(1)}),\tag{28.6}$$

其中右端应该代入(28.5).结果我们得到线性非齐次微分方程,其右端可以变换

为简单周期函数之和.例如

$$Q_\alpha^{(1)}Q_\beta^{(1)} = a_\alpha a_\beta \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha)\cos(\omega_\beta t + \alpha_\beta)$$

$$= \frac{1}{2}a_\alpha a_\beta\{\cos[(\omega_\alpha + \omega_\beta)t + \alpha_\alpha + \alpha_\beta] + \cos[(\omega_\alpha - \omega_\beta)t + \alpha_\alpha - \alpha_\beta]\}.$$

于是方程(28.6)右端包含相应于频率为系统固有频率之和、之差的振动的项.我们所寻找的这些方程的解应该是包含同样周期性因子的形式.因此,我们断定,在二阶近似中,在频率为 ω_α 的简正振动上叠加了频率为

$$\omega_\alpha \pm \omega_\beta \tag{28.7}$$

(也包括倍频 $2\omega_\alpha$ 和零频,零频相应于常数位移)的另外一些振动.这些频率称为组合频率.组合振动的振幅正比于相应的简正振动的振幅之积 $a_\alpha a_\beta$(或者平方 a_α^2).

在更高阶近似中,当拉格朗日函数的展开式中包含更多的项时,出现的组合频率是更多频率 ω_α 的和与差,此外还会出现一个新现象.

在 3 阶近似的组合频率中出现与原频率 ω_α 相同的频率 $\omega_\alpha (= \omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\beta)$.在应用上述方法时,运动方程右端将有共振项,导致方程的解中出现振幅随时间增长的项.但是,从物理角度显然可知,没有外部能量来源的封闭系统不可能自己增大振动强度.

事实上,在高阶近似中基频 ω_α 与出现在势能二次表达式中的"无扰"值 $\omega_\alpha^{(0)}$ 相比发生了变化.在解中出现随时间增长项,是因为下面类型的展开式

$$\cos(\omega_\alpha^{(0)} + \Delta\omega_\alpha)t \approx \cos(\omega_\alpha^{(0)}t) - t\Delta\omega_\alpha \sin(\omega_\alpha^{(0)}t)$$

在 t 足够大时,显然不合理.

因此,在研究下一阶近似时,逐阶近似方法必须需改,要使出现在解中的周期性因子,从开始就包含准确的而不是近似的频率.求解运动方程并要求事实上不出现共振项可以确定频率必要的改变.

我们以一个自由度的非简谐振动为例介绍这种方法,将拉格朗日函数写成

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2}{2}x^2 - \frac{m\alpha}{3}x^3 - \frac{m\beta}{4}x^4. \tag{28.8}$$

相应的运动方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3. \tag{28.9}$$

我们将寻求级数形式的逐阶近似解

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)},$$

并且

$$x^{(1)} = a\cos\omega t \tag{28.10}$$

中精确的 ω 将在后面以级数形式 $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \cdots$ 求解出来(适当选择初始时刻,总可以使 $x^{(1)}$ 中的初相等于零).但是这时方程(28.9)不是很方便,这是因为代入(28.10)后,方程的左端不是严格等于零.所以我们预先将该方程写

成等价形式

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x}+\omega_0^2x=-\alpha x^2-\beta x^3-\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\ddot{x}. \tag{28.11}$$

此处假设 $x=x^{(1)}+x^{(2)}$，$\omega=\omega_0+\omega^{(1)}$，略去二阶以上的小量项，可得 $x^{(2)}$的方程

$$\ddot{x}^{(2)}+\omega_0^2x^{(2)}=-\alpha a^2\cos^2\omega t+2\omega_0\omega^{(1)}a\cos\omega t$$

$$=-\frac{\alpha a^2}{2}-\frac{\alpha a^2}{2}\cos(2\omega t)+2\omega_0\omega^{(1)}a\cos\omega t.$$

等式右端无共振项的条件容易给出 $\omega^{(1)}=0$，这与本节开始所讲的二阶近似方法一致. 然后，用通常的方法求解非齐次线性方程可得

$$x^{(2)}=-\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}+\frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}\cos(2\omega t). \tag{28.12}$$

进一步，在(28.11)中假设 $x=x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}$，$\omega=\omega_0+\omega^{(2)}$，可得 $x^{(3)}$的方程

$$\ddot{x}^{(3)}+\omega_0^2x^{(3)}=-2\alpha x^{(1)}x^{(2)}-\beta x^{(1)3}+2\omega_0\omega^{(2)}x^{(1)}$$

或者将该方程右端代入(28.10)和(28.12)，经过简单的变换得

$$\ddot{x}^{(3)}+\omega_0^2x^{(3)}=-a^3\left[\frac{\beta}{4}+\frac{\alpha^2}{6\omega_0^2}\right]\cos(3\omega t)+a\left[2\omega_0\omega^{(2)}+\frac{5a^2\alpha^2}{6\omega_0^2}-\frac{3}{4}a^2\beta\right]\cos\omega t.$$

令共振因子 $\cos\omega t$ 的系数等于零，可得对基频的修正量

$$\omega^{(2)}=\left(\frac{3\beta}{8\omega_0}-\frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}\right)a^2, \tag{28.13}$$

它正比于振动振幅的平方. 于是，3 阶组合振动为

$$x^{(3)}=\frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2}+\frac{\beta}{2}\right)\cos(3\omega t). \tag{28.14}$$

§ 29 非线性振动中的共振

当在系统的强迫振动中计入非简谐项时，在共振现象中会出现本质的新特性.

在方程(28.9)右端加入周期(频率为 γ)外力，得

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{f}{m}\cos\gamma t-\alpha x^2-\beta x^3, \tag{29.1}$$

其中也考虑了阻尼系数为 λ(下面假设为小量)的摩擦力. 严格地讲，在自由振动方程中考虑非线性项的同时，也应该考虑强迫力幅值中的高阶项(比如当外力的幅值依赖于位移 x 时会产生高阶项). 我们不计入这些项仅仅是为了简化公式，它们不影响定性的结果.

设

$$\gamma=\omega_0+\varepsilon$$

(ε 是小量),即 γ 接近于通常的共振值. 利用下面的方法,我们不研究方程(29.1)就可以探讨所产生运动的特性.

在线性近似中,在共振附近,强迫振动的振幅 b 对外力幅值 f 和频率 γ 的依赖关系由(26.7)给出,该公式可以写成

$$b^2(\varepsilon^2+\lambda^2)=\frac{f^2}{4m^2\omega_0^2}. \tag{29.2}$$

振动的非线性导致固有频率对振幅的依赖,将固有频率写成

$$\omega_0+\kappa b^2, \tag{29.3}$$

其中常数 κ 是非简谐系数的确定的函数(参见(28.13)). 相应地,在公式(29.2)中(更确切地说是在很小的差 $\gamma-\omega_0$ 中)用 $\omega_0+\kappa b^2$ 代替 ω_0.

仍采用记号 $\varepsilon=\gamma-\omega_0$,结果可得方程

$$b^2[(\varepsilon-\kappa b^2)^2+\lambda^2]=\frac{f^2}{4m^2\omega_0^2} \tag{29.4}$$

或者

$$\varepsilon=\kappa b^2\pm\sqrt{\left(\frac{f}{2m\omega_0 b}\right)^2-\lambda^2}.$$

方程(29.4)是 b^2的三次方程,它的实根确定强迫振动的振幅. 在给定外力幅值 f 时,我们研究这个振幅对外力频率的依赖关系.

当 f 足够小时,振幅 b 也很小,可以在(29.4)中忽略 b 的二阶以上项,我们就回到(29.2)给出的函数关系$b(\varepsilon)$,可用在 $\varepsilon=0$ 点有极大值的对称曲线表示(图 32a). 随着 f 的增大,曲线发生变形,开始还保持有一个极大值的特性(图 32b),但极大值移动到正 ε 一边(当 $\kappa>0$ 时). 这时方程(29.4)的 3 个根中只有一个是实数.

然而,从某个特定值 $f=f_k$(我们下面再确定)开始,曲线的性质发生改变. 对于每个 $f>f_k$ 都存在方程(29.4)有 3 个实根的频率区间,相应于图 32c 中的 $BCDE$ 部分.

在 D 点和 C 点的条件 $\mathrm{d}b/\mathrm{d}\varepsilon=\infty$ 确定这个区间的边界. 将方程(29.4)对 ε 求导得

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\varepsilon}=\frac{-\varepsilon b+\kappa b^3}{\varepsilon^2+\lambda^2-4\kappa\varepsilon b^2+3\kappa^2b^4}.$$

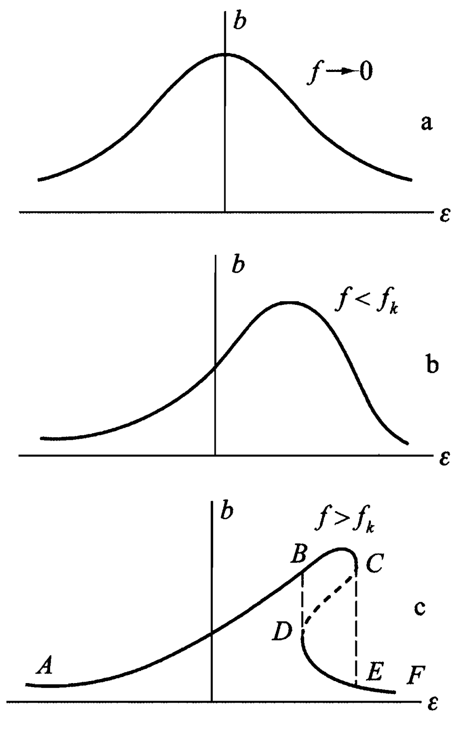


图 32

所以 D 点和 C 点的位置由方程

$$\varepsilon^2-4\kappa\varepsilon b^2+3\kappa^2b^4+\lambda^2=0, \tag{29.5}$$

和(29.4)的联立解确定,相应的 ε 的两个值都是正的.在 $\mathrm{d}b/\mathrm{d}\varepsilon=0$ 的点,振幅达到最大值,这时 $\varepsilon=\kappa b^2$,由(29.4)得

$$b_{\max}=\frac{f}{2m\omega_0\lambda} \tag{29.6}$$

这个值与(29.2)给出的最大值相同.

可以证明(我们不在这里给出)①,方程(29.4)的3个实根中的中间根(即图32c上的虚线段 CD 表示的根),相应于系统的不稳定振动:无论多么小的任何作用都会使处于这种态的系统转到相应于较大根或者较小根的振动(即 BC 或者 DE 段).

因此,只有 ABC 和 DEF 两个分支对应着系统的实际振动.这时非常重要的特性是,存在允许两个不同振幅的频率区间.例如,在外力频率逐渐增大时,强迫振动的振幅沿着曲线 ABC 增大.在 C 点振幅发生不连续的跃变,突然减小到 E 点对应的值,然后(在继续增大频率情况下)沿着曲线 EF 变化.如果现在减小频率,强迫振动振幅将沿着 FD 变化,在 D 点突跳到 B 点,然后沿着 BA 减小.

为了计算 f_k,我们注意到,这是(b^2 的)二次方程(29.5)有重根时对应的 f 值.当 $f=f_k$ 时整个曲线段 CD 变为一个拐点.令二次方程(29.5)的判别式等于零,得 $\varepsilon^2=3\lambda^2$,相应的二重根为 $\kappa b^2=2\varepsilon/3$.将 b 和 ε 的这些值代入方程(29.4)可得

$$f_k^2=\frac{32m^2\omega_0^2\lambda^3}{3\sqrt{3}|\kappa|}. \tag{29.7}$$

振动的非线性除了使在频率 $\gamma\approx\omega_0$ 处的共振现象的性质改变外,还导致出现新的共振,即频率显著不同于 ω_0 的外力可以激发频率接近 ω_0 的振动.

设外力频率为 $\gamma\approx\omega_0/2$,即

$$\gamma=\omega_0/2+\varepsilon.$$

在一阶线性近似中,外力激发系统同频率的振动,振幅与外力幅值成正比,即

$$x^{(1)}=\frac{4f}{3m\omega_0^2}\cos\left(\frac{\omega_0}{2}+\varepsilon\right)t$$

(见公式(22.4)).当在二阶近似中考虑非线性项后,这些振动导致在方程(29.1)右端出现频率为 $2\gamma\approx\omega_0$ 的项.就是说,将 $x^{(1)}$代入方程

$$\ddot{x}^{(2)}+2\lambda\dot{x}^{(2)}+\omega_0^2x^{(2)}+\alpha x^{(2)2}+\beta x^{(2)3}=-\alpha x^{(1)2},$$

运用倍角的余弦并在方程右端仅保留共振项,得

$$\ddot{x}^{(2)}+2\lambda\dot{x}^{(2)}+\omega_0^2x^{(2)}+\alpha x^{(2)2}+\beta x^{(2)3}=-\frac{8\alpha f^2}{9m^2\omega_0^4}\cos(\omega_0+2\varepsilon)t. \tag{29.8}$$

① 证明可以在下面书中找到:Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.:Физматгиз,1958.(中译本:博戈留波夫 Н Н,米特罗波尔斯基 Ю А.非线性振动理论中的渐近方法.金福临等译.上海:上海科学技术出版社,1963.)

这个方程与(29.1)的不同之处仅在于,力的幅值 f 换成正比于 f^2 的表达式.这就是说,这种共振与前述频率 $\gamma\approx\omega_0$ 共振性质相同,但强度较小.在方程(29.4)中用 $-8\alpha f^2/(9m\omega_0^4)$ 代替 f 以及用 2ε 代替 ε,可得函数关系 $b(\varepsilon)$:

$$b^2[(2\varepsilon-\kappa b^2)^2+\lambda^2]=\frac{16\alpha^2 f^4}{81m^4\omega_0^{10}} \tag{29.9}$$

下面设外力频率为

$$\gamma=2\omega_0+\varepsilon.$$

在一阶近似中有

$$x^{(1)}=-\frac{f}{3m\omega_0^2}\cos(2\omega_0+\varepsilon)t.$$

将 $x=x^{(1)}+x^{(2)}$ 代入方程(29.1),我们得不到像前一种情况中出现的表示共振外力的项.然而,由于正比于乘积 $x^{(1)}x^{(2)}$ 的 3 阶项而产生参变共振.如果在所有非线性项中仅保留这一项,则得 $x^{(2)}$ 的方程:

$$\ddot{x}^{(2)}+2\lambda\dot{x}^{(2)}+\omega_0^2x^{(2)}=-2\alpha x^{(1)}x^{(2)}$$

或者

$$\ddot{x}^{(2)}+2\lambda\dot{x}^{(2)}+\omega_0^2\left[1-\frac{2\alpha f}{3m\omega_0^4}\cos(2\omega_0+\varepsilon)t\right]x^{(2)}=0, \tag{29.10}$$

这是(27.8)类型的方程(考虑摩擦),如我们已看到的,它在一定的频率范围内会导致振动不稳定.

但是,这个方程还不足以确定振动的合成振幅.有限振幅的建立与非线性效应相关,为此在运动方程中也应该保留 $x^{(2)}$ 的非线性项:

$$\ddot{x}^{(2)}+2\lambda\dot{x}^{(2)}+\omega_0^2x^{(2)}+\alpha x^{(2)2}+\beta x^{(2)3}=\frac{2\alpha f}{3m\omega_0^2}\cos[(2\omega_0+\varepsilon)t]x^{(2)} \tag{29.11}$$

注意到下面的事实,这个问题可以大大简化.在方程(29.11)右端,令

$$x^{(2)}=b\cos\left[\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\delta\right]$$

(其中 b 是待求的共振振动的振幅,常数 δ 是相位差,它对后面研究不重要),同时将两个余弦函数之积写成和的形式,可得(相对于系统的固有频率 ω_0 而言的)通常类型的共振项为

$$\frac{\alpha fb}{3m\omega_0^2}\cos\left[\left(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)t-\delta\right].$$

由此,问题约化为本节开始所研究的通常的非线性系统共振,区别仅在于这里外力幅值为 $\alpha fb/(3m\omega_0^2)$,$\varepsilon/2$ 代替 ε.在方程(29.4)中做这样的替换,得

$$b^2\left[\left(\frac{\varepsilon}{2}-\kappa b^2\right)^2+\lambda^2\right]=\frac{\alpha^2f^2b^2}{36m^2\omega_0^6}.$$

由该方程求解 b 得可能的振幅值：

$$b=0, \tag{29.12}$$

$$b^2=\frac{1}{\kappa}\left[\frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^3}\right)^2-\lambda^2}\,\right] \tag{29.13}$$

$$b^2=\frac{1}{\kappa}\left[\frac{\varepsilon}{2}-\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{6m\omega_0^3}\right)^2-\lambda^2}\,\right] \tag{29.14}$$

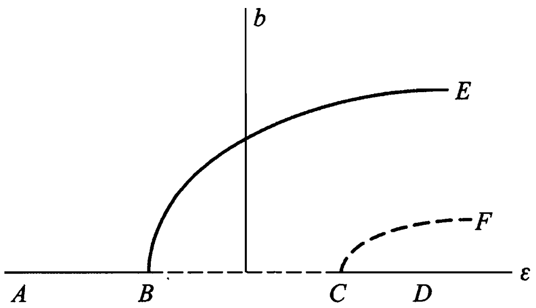


图 33

图 33 画出了 $\kappa>0$ 时所得的 b 对 ε 的依赖关系. 当 $\kappa<0$ 时曲线由图示曲线对 b 轴的反射得到. B 点和 C 点相应于

$$\varepsilon=\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha f}{3m\omega_0^3}\right)^2-4\lambda^2}.$$

在 B 点左边只可能有 $b=0$,即没有共振,也不可能激发频率接近 ω_0 的振动. 在 B 和 C 之间有两个根：$b=0$(图 33 上线段 BC)和表达式(29.13)(分支 BE). 最后,在 C 点右边存在 3 个根(29.12)—(29.14). 但是,不是所有这些值都对应稳定振动. 在 BC 段①上 $b=0$ 不稳定,并且也可以证明,相应于根(29.14)(位于另外两个根之间)的振动总是不稳定的. 在图 33 上不稳定的 b 值用虚线表示.

例如,我们研究外力频率逐渐减小的情况下,初始"静止"②系统的行为. 在到达 C 点之前 $b=0$,在 C 点,系统的状态跳跃到分支 EB 上. 继续减小 ε,振动的振幅在 B 点减小到零. 当频率又增大时,振幅沿着 BE 增大③.

---

① 这一段恰好相应于参变共振区间(27.12),比较(29.10)和(27.8)有 $|h|=2\alpha f/(3m\omega_0^4)$. 所研究现象可能存在的条件

$$\left|\frac{2\alpha f}{3m\omega_0^3}\right|>4\lambda$$

相应于不等式 $h>h_k$.

② 注意,我们这里研究的只是共振,没有共振并不意味着系统静止,系统存在频率为 γ 的微弱强迫振动.

③ 然而,必须注意的是,所有这里导出的公式只有在振幅 b(以及 ε)足够小情况下成立. 事实上,曲线 BE 和 CF 以后相交于一点,达到这点时振动停止因而 $b=0$.

我们上面所研究的共振是在非线性振动系统中可能出现的主要情况.在更高阶近似中也会在其它频率处出现共振.严格地讲,共振应该发生在满足关系式 $n\gamma + m\omega_0 = \omega_0$($m,n$ 是整数)的每一个频率 γ,也就是说,对每一个 $\gamma = p\omega_0/q$(p,q 是整数),都应该发生共振.但是,随着近似阶数的增加,共振的强度(以及发生共振的频率区间大小)迅速减小,以至实际上可以观察到的共振只能是频率 $\gamma \approx p\omega_0/q$ 并且 p,q 的值都不大的情况.

习　　题

习题　试求在频率 $\gamma \approx 3\omega_0$ 上共振的函数关系 $b(\varepsilon)$.

解:在一阶近似中

$$x^{(1)} = -\frac{f}{8m\omega_0^2}\cos[(3\omega_0 + \varepsilon)t].$$

对二阶近似 $x^{(2)}$,由(29.1)可得方程

$$\ddot{x}^{(2)} + 2\lambda\dot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} + \alpha x^{(2)2} + \beta x^{(2)3} = -3\beta x^{(1)} x^{(2)2},$$

其中等式右端只写出了导致所要研究的共振的项.在该方程中假设

$x^{(2)} = b\cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)t + \delta\right]$ 并从 3 个余弦的乘积中分出共振项,可得方程右端表达式为

$$\frac{3\beta b^2 f}{32m\omega_0^2}\cos\left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{3}\right)t - 2\delta\right]$$

由此可见,b 对 ε 的依赖关系,可以在方程(29.4)中用 $3\beta b^2 f/(32m\omega_0^2)$ 代替 f,用 $\varepsilon/3$ 代替 ε 求得:

$$b^2\left[\left(\frac{\varepsilon}{3} - \kappa b^2\right)^2 + \lambda^2\right] = \frac{9\beta^2 f^2}{2^{12}m^2\omega_0^6}b^4 \equiv Ab^4.$$

这个方程的根为

$$b = 0,\quad b^2 = \frac{\varepsilon}{3\kappa} + \frac{A}{2\kappa^2} \pm \frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{\varepsilon A}{3\kappa} + \frac{A^2}{4\kappa^2} - \lambda^2}.$$

在图 34 上画出了 b 对 ε 的依赖关系的特征曲线($\kappa > 0$).仅有值 $b = 0$(横轴)和分支 AB 对应于稳定振动.A 点相应的值为

$$\varepsilon_k = \frac{3(4\kappa^2\lambda^2 - A^2)}{4\kappa A},\quad b_k^2 = \frac{4\kappa^2\lambda^2 + A^2}{4\kappa^2 A}.$$

只有在 $\varepsilon > \varepsilon_k$ 因而 $b > b_k$ 的情况下存在振动.由于状态 $b = 0$ 总是稳定的,因此为了激发振动,初始的"推动"是必须的.

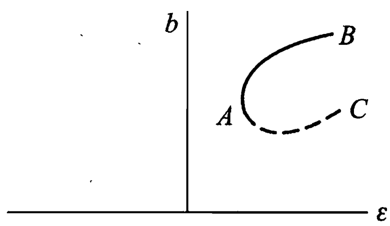


图 34

上面所得的公式只有在 ε 足够小时才成立. 如果力的幅值满足条件 $\lambda^2/\omega_0 \ll A/\kappa \ll \omega_0$, 则 λ 是小量可以保证 ε 为小量.

§ 30 快速振动场中的运动

我们研究同时受定常势场 U 和随时间变化的高频力

$$f = f_1\cos\omega t + f_2\sin\omega t \tag{30.1}$$

作用的质点的运动, 其中 f_1, f_2 仅是坐标的函数. 高频是指频率满足条件 $\omega \gg 1/T$, 其中 T 与质点仅在定常场 U 中运动的周期有相同的数量级. 从大小上讲, 并不假设 f 比场 U 相应的力弱. 但是我们将假设这个力引起的质点振动位移(下文用 ξ 表示)很小.

为了简化计算, 我们首先研究在仅依赖于空间坐标 x 的力场中的一维运动. 那么质点运动方程为①

$$m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} + f. \tag{30.2}$$

由作用在质点上力场的性质可知, 质点的运动是沿着某个平滑的轨道移动, 同时围绕该轨道作频率为 ω 的微振动. 因此我们将函数 $x(t)$ 表示为下列和的形式

$$x(t) = X(t) + \xi(t), \tag{30.3}$$

其中 $\xi(t)$ 相应于这些微振动.

函数 $\xi(t)$ 在其周期 $2\pi/\omega$ 之内的平均值等于零, 但函数 $X(t)$ 在这段时间内变化很小. 若用字母上面加横线表示平均值, 则有 $\overline{x} = X(t)$, 即函数 $X(t)$ 描述按快速振动平均化以后得到的质点的"平稳"运动. 我们来推导确定这个函数 $X(t)$ 的方程②.

将(30.3)代入(30.2)并按 ξ 的幂展开, 精确到一阶项, 得

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X} - \xi\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}X^2} + f(X,t) + \xi\frac{\partial f}{\partial X}. \tag{30.4}$$

在这个方程中出现了不同性质的项, 即振动项和平稳项. 显然, 方程两边它们应该分别对应相等. 对于振动项, 只需写出

$$m\ddot{\xi} = f(X,t), \tag{30.5}$$

其它项包含小量 ξ, 因此是高阶小量(但是导数 $\ddot{\xi}$ 正比于大的量 ω^2, 因而不是小

① 坐标 x 不一定是笛卡儿坐标, 因而系数 m 不一定是质点的质量, 也不一定像在(30.2)中那样假设是常数. 但是, 这个假设并不影响最后的结果(见本节最后一个脚注).

② 下述方法是基于卡皮查(1951, П. Л. Капица)的思想. Kapitza P L. J. Exp. Theor. Phys, 1951, 21: 588.

量).将(30.1)代入(30.5),积分(这时将 X 看作常数)得

$$\xi = -\frac{f}{m\omega^2}. \tag{30.6}$$

现在,我们将方程(30.4)对时间平均(按上面所指的意思).因为 f 和 ξ 的一次幂的平均值为零,可得方程

$$m\ddot{X} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X} + \overline{\xi\frac{\partial f}{\partial X}} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}X} - \frac{1}{m\omega^2}\overline{f\frac{\partial f}{\partial X}},$$

该方程只包含函数 $X(t)$.方程可以重新写为

$$m\ddot{X} = -\frac{\mathrm{d}U_{\text{eff}}}{\mathrm{d}X}, \tag{30.7}$$

其中"有效势能"定义为①

$$U_{\text{eff}} = U + \frac{1}{2m\omega^2}\overline{f^2} = U + \frac{1}{4m\omega^2}(f_1^2 + f_2^2). \tag{30.8}$$

比较此式和(30.6)可见,附加到场 U 中的项不是别的,正是振动动能的平均值

$$U_{\text{eff}} = U + \frac{m}{2}\overline{\dot{\xi}^2}. \tag{30.9}$$

可见,对振动平均后的质点的运动,与在定常势场 U 加上正比于变场幅值平方的定常场中的运动相同.

所得的结果很容易推广到用广义坐标 q_i 描述的任意自由度系统.有效势能表达式不是(30.8),而是

$$U_{\text{eff}} = U + \frac{1}{2\omega^2}\sum_{i,k} a_{ik}^{-1}\overline{f_i f_k} = U + \sum_{i,k}\frac{a_{ik}}{2}\overline{\dot{\xi}_i\dot{\xi}_k}, \tag{30.10}$$

其中量 a_{ik}^{-1}(一般来说为坐标的函数)是系统的动能(5.5)的系数 a_{ik} 构成的矩阵之逆矩阵的元素.

习　　题

习题 1　试求摆的稳定平衡位置,假设悬挂点以高频 $\gamma(\gamma \gg \sqrt{g/l})$ 在竖直方向振动.

解:由§5 的习题 3 情况 c 所得的拉格朗日函数可知,在这种情况下,变力为

$$f = -mla\gamma^2\cos\gamma t\sin\varphi$$

(这里变量 x 用角 φ 表示).所以有效势能为

$$U_{\text{eff}} = mgl\left(-\cos\varphi + \frac{a^2\gamma^2}{4gl}\sin^2\varphi\right).$$

稳定平衡位置相应于这个函数取极小值.竖直向下的位置($\varphi = 0$)总是稳定的.

① 在 m 依赖于 x 的情况下,经过较长的计算可以证明,公式(30.7)和(30.8)还是成立的.

在满足条件

$$a^2\gamma^2>2gl$$

的情况下，竖直向上的位置($\varphi=\pi$)也是稳定的.

习题 2 同上题，但摆的悬挂点水平振动.

解：由§5的习题3情况b所得的拉格朗日函数可知，$f=mla\gamma^2\cos\gamma t\cos\varphi$，然后可得

$$U_{\mathrm{eff}}=mgl\left[-\cos\varphi+\frac{a^2\gamma^2}{4gl}\cos^2\varphi\right].$$

如果 $a^2\gamma^2<2gl$，则平衡位置 $\varphi=0$ 稳定. 如果 $a^2\gamma^2>2gl$，则稳定平衡位置相应于

$$\cos\varphi=\frac{2gl}{a^2\gamma^2}.$$

第六章

刚体的运动

§31 角速度

在力学中刚体可以定义为质点间距离保持不变的质点组成的系统. 当然, 自然界中实际存在的系统仅是近似地满足这个条件. 然而, 在通常条件下, 大部分固体的形状和尺寸变化很小, 在研究它作为一个整体的运动规律时, 完全可以不考虑这些变化.

为了推导方便, 我们下面将刚体当作离散质点的集合. 然而, 这与力学中将刚体通常当作连续体而不考虑内部结构的主张一点也不矛盾. 将当作离散质点系得到的公式转换为当作连续体的公式, 只需将质点的质量换成体积微元 $\mathrm{d}V$ 包含的质量 $\rho\mathrm{d}V$(其中 ρ 是刚体的密度)以及将求和换为对这个刚体的体积积分.

为了描述刚体的运动, 我们引入两个坐标系:"固定"坐标系, 即惯性坐标系 XYZ, 以及与刚体刚性固连并参与刚体全部运动的动坐标系 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$. 取刚体质心为动坐标系原点比较方便.

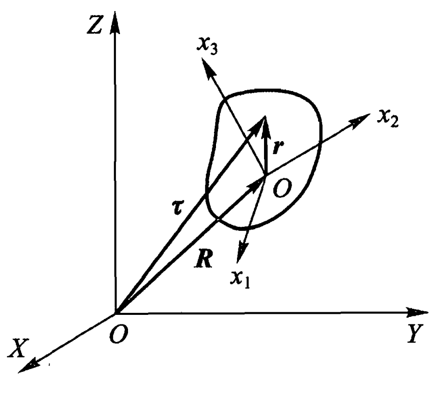


图 35

刚体相对固定坐标系的位置完全由动坐标系的位置确定. 设径矢 $\boldsymbol{R}$ 表示动坐标系原点的位置(图 35). 动坐标系的坐标轴相对固定坐标系的指向由 3 个独立的角确定, 连同径矢 $\boldsymbol{R}$ 的三个分量共有 6 个坐标. 因此, 刚体是一个有 6 个自由度的力学系统.

我们研究刚体的无穷小位移, 可以将其表示

为两个位移之和.其中一个是刚体的无穷小平移,使质心从初位置运动到末位置,但不改变动坐标系各轴的指向.第二个是绕质心的无穷小转动,这样刚体的其余部分移动到末位置.

我们将刚体上任意点 P 在动坐标系中的径矢用 $\boldsymbol{r}$ 表示,而该点在固定坐标系中的径矢用 $\boldsymbol{\tau}$ 表示.那么 P 点的无穷小位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}$ 等于质心位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{R}$ 与绕质心转动无穷小角度 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$ 产生的位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}$ 之和(参见(9.1)):

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\mathrm{d}\boldsymbol{R}+\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}.$$

将等式除以位移发生的时间 $\mathrm{d}t$,令①

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}\,,\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{V},\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\Omega}, \tag{31.1}$$

可得关系

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}. \tag{31.2}$$

矢量 $\boldsymbol{V}$ 是刚体质心的速度,也是刚体的平动速度.矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 称为刚体转动角速度,其方向(也是 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$ 的方向)与转动轴方向一致.于是,刚体上任意点的速度(相对固定坐标系),可以用刚体平动速度和转动角速度表示.

需要着重指出,在推导公式(31.2)时并没有利用坐标原点位于质心这个事实.在后面计算运动刚体动能时,这样选坐标原点的好处就变得一目了然了.

下面设与刚体固连的坐标系的原点不在质心 O,而在距离 O 点为 $\boldsymbol{a}$ 的 O' 点.设坐标原点 O' 的平移速度为 $\boldsymbol{V}'$,这个新坐标系的角速度为 $\boldsymbol{\Omega}'$.

我们重新研究刚体上某点 P,用 $\boldsymbol{r}'$ 表示其相对 O' 点的径矢.因此有 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{a}$,代入(31.2)得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}'.$$

另一方面,根据 $\boldsymbol{V}'$ 和 $\boldsymbol{\Omega}'$ 的定义,应该有 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{V}'+\boldsymbol{\Omega}'\times\boldsymbol{r}'$.所以我们可得如下结论:

$$\boldsymbol{V}'=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{a},\qquad \boldsymbol{\Omega}'=\boldsymbol{\Omega}. \tag{31.3}$$

第二个等式非常重要.我们可以看出,与刚体固连的坐标系在任意时刻的转动角速度与这个所选取的特定坐标系无关.所有这样的坐标系均以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 旋转,它们大小相等,方向相互平行.这使我们有理由将 $\boldsymbol{\Omega}$ 称为刚体的角速度.而平动速度没有这样"绝对的"性质.

由(31.3)的第一个公式可知,如果在坐标原点 O 的某种选择下 $\boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$(在给定时刻)相互垂直,则对于任意选择的原点 O',$\boldsymbol{V}'$ 和 $\boldsymbol{\Omega}'$ 也是相互垂直的.由(31.2)可知,这种情况下刚体中的所有点的速度 $\boldsymbol{V}$ 都垂直于 $\boldsymbol{\Omega}$.这时总可以选

① 为避免任何误解,应该注意到这种表示角速度的方式有点任意:仅对无限小转动有矢量 $\delta\boldsymbol{\varphi}$,而对所有有限运动,没有这个矢量.——英译本注

择坐标原点 O'①使速度 $\boldsymbol{V}'=0$,刚体在那个特定瞬时的运动就是绕过 O'的轴的纯转动.这个轴称为刚体瞬时转动轴②.

今后我们总是假设动坐标系原点选在刚体质心,因此转动轴也通过质心.一般来说,当刚体运动时,$\boldsymbol{\Omega}$ 的大小和方向也都会变化.

§ 32 惯量张量

为了计算刚体的动能,我们将刚体当作离散质点系,因此有

$$T=\sum\frac{mv^2}{2},$$

这里对刚体的所有质点求和.为了书写公式简便,此处和下文中我们省略了标记质点的下标.

将公式(31.2)代入得

$$T=\sum\frac{m}{2}(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})^2=\sum\frac{m}{2}V^2+\sum m\boldsymbol{V}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})+\sum\frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})^2.$$

对刚体的所有质点 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 都相同.所以在第一项中 $V^2/2$ 可以移到求和号之外,$\sum m$ 是刚体的质量,我们用 μ 表示.第二项写成

$$\sum m\boldsymbol{V}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})=\sum m\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{\Omega})=\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{\Omega}\cdot\sum m\boldsymbol{r}.$$

由此可见,如果坐标原点选在刚体质心,则由于 $\sum m\boldsymbol{r}=0$,故这一项等于零.最后,我们展开第 3 项中矢量积的平方,结果得

$$T=\frac{\mu V^2}{2}+\frac{1}{2}\sum m\left[\Omega^2r^2-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r})^2\right]. \tag{32.1}$$

于是,刚体动能可以写成两个部分之和.(32.1)的第一项是平动的动能,其形式如同整个刚体质量集中在质心.第二项是刚体以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 绕通过质心的轴转动的动能.需要强调指出,正是由于固定在刚体上的坐标系的坐标原点选在质心上,才有动能分解为两部分的可能性.

我们将转动动能改写成张量形式,用 $\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{\Omega}$ 的分量 x_i,Ω_i 表示为③

$$\begin{aligned}T_{\text{rot}}&=\frac{1}{2}\sum m\left[\Omega_i^2x_l^2-\Omega_ix_i\Omega_kx_k\right]=\frac{1}{2}\sum m\left[\Omega_i\Omega_k\delta_{ik}x_l^2-\Omega_i\Omega_kx_ix_k\right]\\&=\frac{1}{2}\Omega_i\Omega_k\sum m(x_l^2\delta_{ik}-x_ix_k).\end{aligned}$$

---

① 当然,它可以选在刚体之外.

② 在 $\boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$ 不垂直的一般情况下,可以选择坐标原点使 $\boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$ 平行,即运动(在给定时刻)是绕某个轴的转动与沿该轴的平动之和.

③ 在本章字母 i,j,k 表示张量的下标,可取值 1,2,3.总是采用求和规则,按此规则省略求和号,在任何表示式中两次重复出现的下标(也称"哑"下标)就意味着对值 1,2,3 求和,例如 $A_iB_i=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$,$A_l^2=A_lA_l=\boldsymbol{A}^2$ 等等.显然"哑"下标的表示可以任意改变(只要它不与该式子中使用的其它下标相同).

这里用到了恒等式 $\Omega_i=\delta_{ik}\Omega_k$，其中 δ_{ik} 是单位张量(其分量在 $i=k$ 时等于 1，在 $i\neq k$ 时等于零). 引入张量

$$I_{ik}=\sum m(x_l^2\delta_{ik}-x_ix_k), \tag{32.2}$$

最终可得刚体动能表达式为

$$T=\frac{\mu V^2}{2}+\frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k. \tag{32.3}$$

将(32.3)减去势能可得刚体的拉格朗日函数

$$L=\frac{\mu V^2}{2}+\frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k-U. \tag{32.4}$$

一般情况下势能是确定刚体位置的 6 个变量的函数，例如质心的 3 个坐标 X，Y，Z 和确定动坐标轴相对固定坐标轴方向的 3 个角.

张量 I_{ik} 称为*刚体惯量矩张量*，或者简称*刚体惯量张量*. 由定义(32.2)显见，它是对称的，即

$$I_{ik}=I_{ki}. \tag{32.5}$$

为了清楚起见，我们将惯量张量的分量写成显式

$$I_{ik}=\begin{pmatrix}\sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz\\ -\sum myx & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz\\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2)\end{pmatrix}. \tag{32.6}$$

分量 I_{xx}，I_{yy}，I_{zz} 称为对相应坐标轴的转动惯量.

显然，惯量张量可以相加，即刚体转动惯量等于其各部分转动惯量之和.

如果将刚体当作连续体，则在定义(32.2)中的求和改为对刚体体积的积分：

$$I_{ik}=\int\rho(x_l^2\delta_{ik}-x_ix_k)\mathrm{d}V. \tag{32.7}$$

像任何二阶对称张量一样，惯量张量可以通过适当选择坐标轴 x_1，x_2，x_3 的方向约化为对角的形式. 这些方向称为*惯量主轴*，而惯量张量相应的对角分量称为*主转动惯量*，用 I_1，I_2，I_3 表示. 在这样选择坐标轴 x_1，x_2，x_3 时，转动动能表示为特别简单的形式：

$$T_{\mathrm{rot}}=\frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2+I_2\Omega_2^2+I_3\Omega_3^2). \tag{32.8}$$

我们发现，3 个主转动惯量中的每一个都不会大于另外两个之和. 例如

$$I_1+I_2=\sum m(x_1^2+x_2^2+2x_3^2)\geqslant\sum m(x_1^2+x_2^2)=I_3. \tag{32.9}$$

3 个主转动惯量各不相等的刚体称为*非对称陀螺*.

如果两个主转动惯量相等，$I_1=I_2\neq I_3$，则刚体称为*对称陀螺*. 在这种情况下，在平面 x_1x_2 内有一个主轴方向可任意选取.

如果所有 3 个主转动惯量都相等，则刚体称为*球陀螺*. 在这种情况下 3 个主轴可以任意选为任何 3 个相互垂直的轴.

如果刚体具有某种对称性,确定惯量主轴就容易得多.显然,质心位置和惯量主轴的方向应该具有与刚体相同的对称性.

例如,如果刚体有对称面,则质心应该在该平面内.两个惯量主轴也应该位于该平面内,而第3个主轴垂直该平面.对于这种情况,最明显的例子是平面质点系.这种情况下3个主转动惯量之间存在简单的关系.如果以系统所在平面为x_1x_2平面,则由于对所有质点$x_3=0$,故

$$I_1=\sum mx_2^2,\quad I_2=\sum mx_1^2,\quad I_3=\sum m(x_1^2+x_2^2),$$

因此

$$I_3=I_1+I_2. \tag{32.10}$$

如果刚体有某阶的对称轴,则质心应该位于该轴上.惯量主轴之一与此轴重合,另外两个则与之垂直.如果对称轴的阶数大于2,则刚体为对称陀螺.事实上,垂直于对称轴的任一主轴可以绕该对称轴旋转一个不等于180°的角度,即这组垂直轴的选取不是唯一的,而这只有当刚体是对称陀螺时才能如此.

位于一条直线上的质点系是一个特殊情况.如果选择这个直线为x_3轴,则对于所有质点$x_1=x_2=0$,因此两个主转动惯量相等,第3个为零:

$$I_1=I_2=\sum mx_3^2,\quad I_3=0. \tag{32.11}$$

这种系统称为转子.区别于其它刚体的特性是,转子仅有两个(不是3个)转动自由度,相应于绕x_1和x_2的转动,显然,论及直线绕自身的转动是没有意义的.

最后,再做一个关于惯量张量计算的说明.虽然我们是在原点为质心的坐标系中定义这个张量的(只有在这个定义下基本公式(32.3)才成立),但是对于这个张量的计算,有时可能更为方便的是先计算相对另一个坐标原点O'定义的类似张量

$$I'_{ik}=\sum m(x_l'^2\delta_{ik}-x_i'x_k').$$

如果距离OO'由矢量$\boldsymbol{a}$表示,则$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{a}$, $x_i=x_i'+a_i$,考虑到按照O点的定义,$\sum m\boldsymbol{r}=0$,我们得

$$I'_{ik}=I_{ik}+\mu(a^2\delta_{ik}-a_ia_k). \tag{32.12}$$

按这个公式,知道I'_{ik}就很容易计算出I_{ik}.

习　　题

习题1 将分子看作质点之间距离不变的系统,在下列情况下,试求分子的主转动惯量.

a) 分子由位于一条直线上的原子构成.

答案:

$$I_1=I_2=\frac{1}{\mu}\sum_{a\neq b}m_am_bl_{ab}^2,\qquad I_3=0,$$

其中 m_a 是第 a 个原子的质量，l_{ab} 是原子 a 和 b 之间的距离，求和是对分子中的所有原子对进行的，每个原子对 a 和 b 的值在求和中仅出现一次.

对于双原子分子，求和中只有一项，结果是显然的，即两个原子的约化质量乘以它们之间的距离的平方：

$$I_1 = I_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2.$$

b) 形状为等腰三角形的 3 原子分子(图 36).

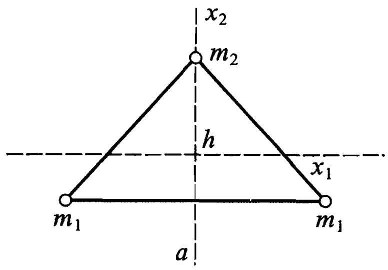


图 36

答案：质心位于三角形的对称轴上，距底边为 $X_2 = m_2 h/\mu$，h 是三角形的高转动惯量为

$$I_1 = \frac{2m_1 m_2}{\mu} h^2, \quad I_2 = \frac{m_1}{2} a^2, \quad I_3 = I_1 + I_2.$$

c) 4 原子分子，原子位于正三棱锥的顶点(图 37).

答案：质心位于三棱锥的对称轴上，距底面为 $X_3 = m_2 h/\mu$，h 是正三棱锥的高转动惯量为

$$I_1 = I_2 = \frac{3m_1 m_2}{\mu} h^2 + \frac{m_1}{2} a^2, \quad I_3 = m_1 a^2.$$

当 $m_1 = m_2$，$h = a\sqrt{2/3}$ 时，这是正四面体分子，转动惯量为

$$I_1 = I_2 = I_3 = m_1 a^2.$$

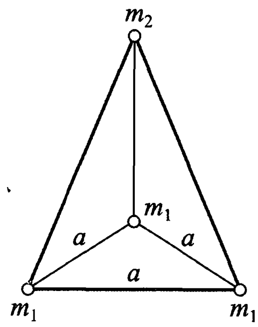


图 37

习题 2 试求下列均匀连续体的主转动惯量.

a) 长为 l 的细长杆.

答案：

$$I_1 = I_2 = \mu l^2/12, \qquad I_3 = 0 (\text{杆的粗细忽略不计}).$$

b) 半径为 R 的球体.

答案：

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5} \mu R^2$$

(通过计算 $I_1 + I_2 + I_3 = 2\rho \int r^2 \mathrm{d}V$ 求出).

c) 半径为 R 高为 h 的圆柱体.

答案：

$$I_1 = I_2 = \frac{\mu}{4}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right), \quad I_3 = \frac{\mu}{2} R^2$$

(圆柱轴为 x_3 轴).

d) 棱边为 a，b，c 的长方体.

答案：

$$I_1=\frac{\mu}{12}(b^2+c^2),\qquad I_2=\frac{\mu}{12}(c^2+a^2),\qquad I_3=\frac{\mu}{12}(a^2+b^2)$$

(x_1,x_2,x_3 轴分别平行于棱边 a,b,c).

e) 高为 h 底面半径为 R 的圆锥体.

解：首先相对于以圆锥顶点为原点的坐标轴(图 38)，计算张量 I'_{ik}. 用柱坐标很容易计算得

$$I'_1=I'_2=\frac{3}{5}\mu\left(\frac{R^2}{4}+h^2\right)\qquad I'_3=\frac{3}{10}\mu R^2.$$

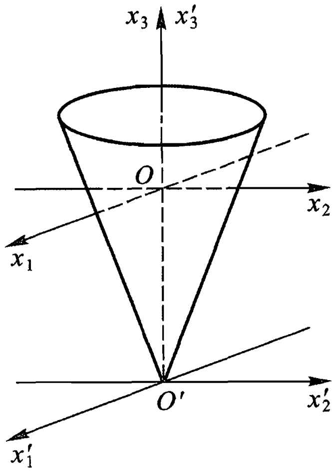


图 38

经过简单的计算可知，质心位于圆锥轴上，距离顶点 $a=3h/4$. 根据公式(32.12)因而可得

$$I_1=I_2=I'_1-\mu a^2=\frac{3}{20}\mu\left(R^2+\frac{h^2}{4}\right)$$

$$I_3=I'_3=\frac{3}{10}\mu R^2.$$

f) 半轴为 a,b,c 的三轴椭球体.

解：质心与椭球中心重合，惯量主轴与椭球主轴重合. 用坐标变换 $x=a\xi,y=b\eta,z=c\zeta$ 将椭球方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

变为单位球方程

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1.$$

通过这个坐标变换可将对椭球体的体积积分转化为对圆球体的体积积分.

例如，对 x 轴的转动惯量为

$$I_1=\rho\iiint(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho abc\iiint(b^2\eta^2+c^2\zeta^2)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$
$$=\frac{abc}{2}I'(b^2+c^2),$$

其中 I' 是单位球的转动惯量.

考虑到椭球体积等于 $4\pi abc/3$，最后可得转动惯量

$$I_1=\frac{\mu}{5}(b^2+c^2),\qquad I_2=\frac{\mu}{5}(a^2+c^2),\qquad I_3=\frac{\mu}{5}(a^2+b^2).$$

习题 3 试求物理摆(在重力场中绕着固定的水平轴摆动的刚体)的微振动频率.

解：设 l 为刚体质心到转动轴的距离，而 α,β,γ 是惯量主轴与转动轴之间的夹角. 从质心作垂线到转动轴，它与竖直方向夹角 φ 作为坐标变量. 质心速度为 $V=l\dot{\varphi}$，而角速度在主轴上投影为 $\dot{\varphi}\cos\alpha,\dot{\varphi}\cos\beta,\dot{\varphi}\cos\gamma$. 假设 φ 很小，求得势

能

$$U=\mu gl(1-\cos\varphi)\approx\frac{1}{2}\mu gl\varphi^2.$$

所以拉格朗日函数为

$$L=\frac{\mu l^2}{2}\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}(I_1\cos^2\alpha+I_2\cos^2\beta+I_3\cos^2\gamma)\dot{\varphi}^2-\frac{\mu gl}{2}\varphi^2.$$

由此,可得振动频率

$$\omega^2=\frac{\mu gl}{\mu l^2+I_1\cos^2\alpha+I_2\cos^2\beta+I_3\cos^2\gamma}.$$

习题 4　试求图 39 所示系统的动能,其中 OA 和 AB 是长为 l 的均质细杆,铰接于 A 点.杆 OA 绕 O 点(在图示平面内)转动,杆 AB 的端点 B 沿着 Ox 轴滑动.

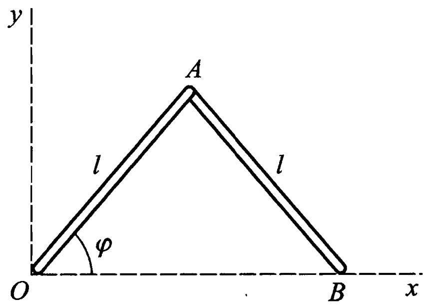


图 39

解:杆 OA 质心(位于杆中心)的速度为 $l\dot{\varphi}/2$,其中 φ 为角 AOB.所以杆 OA 的动能为

$$T_1=\frac{\mu l^2}{8}\dot{\varphi}^2+\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2$$

(μ 是一根杆的质量).

杆 AB 的质心的笛卡儿坐标为:$X=(3l/2)\cos\varphi$,　$Y=(l/2)\sin\varphi$.因为这根杆的转动角速度也是 $\dot{\varphi}$,故其动能为

$$T_2=\frac{\mu}{2}(\dot{X}^2+\dot{Y}^2)+\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2=\frac{\mu l^2}{8}(1+8\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2+\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2.$$

系统的总动能等于

$$T=\frac{\mu l^2}{3}(1+3\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2$$

(根据习题 2 的 a),代入了 $I=\mu l^2/12$).

习题 5　试求在平面上滚动的圆柱(半径为 R)的动能.圆柱的质量分布使得其惯量主轴之一平行于圆柱轴,且与其相距为 a,圆柱对该惯量主轴的转动惯量为 I.

解:从质心作圆柱轴的垂线,该垂线与竖直方向夹角为 φ(图 40).在每一时刻圆柱的运动可以看作绕瞬时转动轴的转动,瞬时转动轴就是圆柱与平面的交线,这个转动的角速度为 $\dot{\varphi}$(绕所有平行轴的转动角速度都相同).质心距离瞬时转动轴为 $\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\varphi}$,所以质心速度为 $V=\dot{\varphi}\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\varphi}$.动能为

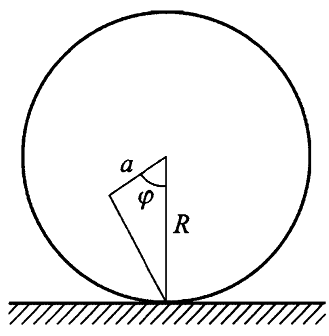


图 40

$$T=\frac{\mu}{2}(a^2+R^2-2aR\cos\varphi)\dot{\varphi}^2+\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2.$$

习题 6 半径为 a 的均质圆柱在半径为 R 的圆柱形曲面内滚动,试求圆柱的动能(图 41).

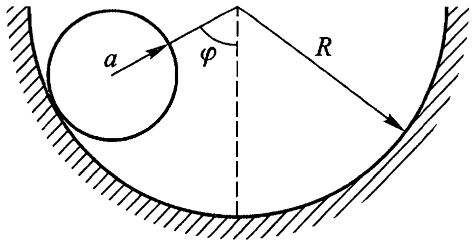


图 41

解:设 φ 是两个圆柱中心连线与竖直方向的夹角.滚动的圆柱质心在轴上,其速度为 $V=\dot{\varphi}(R-a)$.瞬时转动轴是两个圆柱的交线,由关于该瞬时转轴的纯滚动可以求出圆柱的角速度为

$$\Omega=\frac{V}{a}=\dot{\varphi}\frac{R-a}{a}.$$

如果 I_3 是圆柱对其轴的转动惯量,则

$$T=\frac{\mu}{2}(R-a)^2\,\dot{\varphi}^2+\frac{I_3}{2}\,\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\varphi}^2=\frac{3}{4}\mu(R-a)^2\,\dot{\varphi}^2 \qquad (32.13)$$

I_3 已由习题 2 的 c)求得.

习题 7 试求在平面上滚动的匀质圆锥的动能.

解:设圆锥与平面交线为 OA,用 θ 表示 OA 与平面上某固定方向的夹角(图 42).质心位于圆锥轴上,其速度为 $V=a\,\dot{\theta}\cos\alpha$,这里 2α 是圆锥顶角,a 为质心到顶点的距离.我们计算转动角速度,即绕瞬时转动轴 OA 的角速度:

$$\Omega=\frac{V}{a\sin\alpha}=\dot{\theta}\cot\alpha.$$

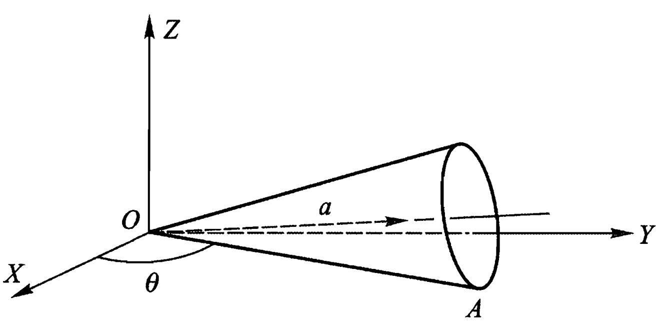


图 42

惯量主轴之一(x_3 轴)与圆锥轴重合,选择另一个轴(x_2 轴)垂直于圆锥轴和直线 OA. 角速度矢量 $\boldsymbol{\Omega}$(平行于 OA)在惯量主轴上的投影为 $\Omega\sin\alpha, 0, \Omega\cos\alpha$. 最后可得动能

$$T=\frac{\mu a^2}{2}\dot{\theta}^2\cos^2\alpha+\frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2\cos^2\alpha+\frac{I_3}{2}\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}\dot{\theta}^2=\frac{3\mu h^2}{40}\dot{\theta}^2(1+5\cos^2\alpha)$$

h 是圆锥的高度,I_1, I_3, a 由习题 2 的 e)给出.

习题 8　试求匀质圆锥的动能. 圆锥的底面在平面上滚动,而顶点与平面的距离始终等于圆锥底面半径(因而圆锥轴平行于平面).

解:设 θ 表示平面上给定方向与圆锥轴在平面上的投影之间的夹角(图 43). 质心速度为 $V=a\dot{\theta}$(符号同习题 7). 瞬时转动轴是圆锥母线 OA,其中 A 是圆锥与平面的切点. 质心到该轴的距离为 $a\sin\alpha$,所以

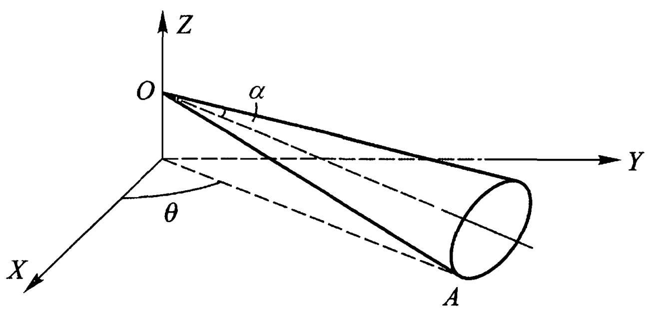


图 43

$$\Omega=\frac{V}{a\sin\alpha}=\frac{\dot{\theta}}{\sin\alpha}.$$

矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 在惯量主轴上的投影为(选择 x_2 轴垂直于圆锥轴和线 OA):$\Omega\sin\alpha=\dot{\theta}$, $0, \Omega\cos\alpha=\dot{\theta}\cot\alpha$. 所以动能为

$$T=\frac{\mu a^2}{2}\dot{\theta}^2+\frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2+\frac{I_3}{2}\dot{\theta}^2\cot^2\alpha=\frac{3\mu h^2}{40}\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}+5\right).$$

习题 9　均质三轴椭球绕自己的一个轴(AB,图 44)旋转,并且这个轴本身又绕着过椭球中心与其垂直的直线 CD 转动. 试求椭球的动能.

解:用 θ 表示绕 CD 的转角,而用 φ 表示绕 AB 的转角(即 CD 与垂直 AB 的惯量主轴 x_1 的夹角). 如果 x_3 轴与 AB 轴重合,那么 $\boldsymbol{\Omega}$ 在惯量主轴上投影为

$$\dot{\theta}\cos\varphi,\quad \dot{\theta}\sin\varphi,\quad \dot{\varphi}.$$

由于系统的质心,即椭球中心是静止的,所以动能为

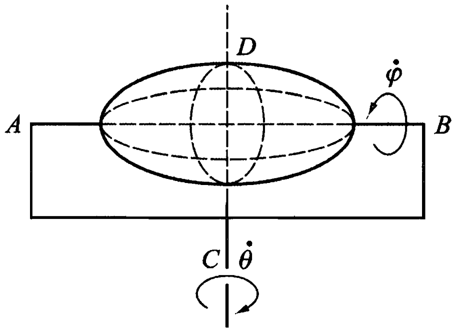


图 44

$$T=\frac{1}{2}(I_1\cos^2\varphi+I_2\sin^2\varphi)\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}I_3\dot{\varphi}^2.$$

习题 10 同上题,但轴 AB 与 CD 不垂直(图 45),且椭球相对这个轴是对称的.

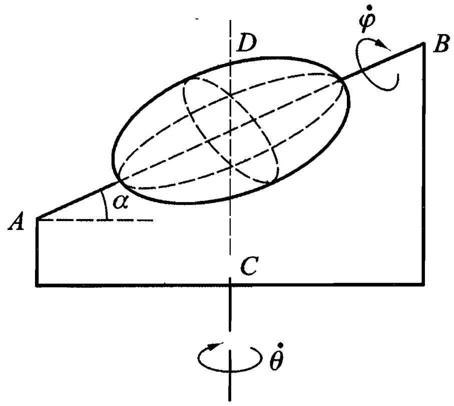


图 45

解:矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 在 AB 轴和垂直于 AB 的另外任意选取的两条惯量主轴上的投影为

$$\dot{\theta}\cos\alpha\cos\varphi,\quad \dot{\theta}\cos\alpha\sin\varphi,\quad \dot{\varphi}+\dot{\theta}\sin\alpha.$$

动能为

$$T=\frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2\cos^2\alpha+\frac{I_3}{2}(\dot{\varphi}+\dot{\theta}\sin\alpha)^2.$$

§ 33 刚体的角动量

我们知道,系统的角动量取决于它相对哪个点定义.在刚体力学中最合适选取的点是动坐标系的原点,即刚体的质心.以后我们将这样定义的角动量记为 $\boldsymbol{M}$.

根据公式(9.6)，当选择刚体质心为坐标原点时，$\boldsymbol{M}$ 就是"内禀"角动量，仅与刚体相对质心的运动有关. 换句话说，在定义 $\boldsymbol{M}=\sum m\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ 中应该用 $\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$ 代替$\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{M}=\sum m\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})=\sum m\left[r^2\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r})\right],$$

或者用张量表示为

$$M_i=\sum m(x_l^2\Omega_i-x_ix_k\Omega_k)=\Omega_k\sum m(x_l^2\delta_{ik}-x_ix_k).$$

最后，考虑到惯量张量定义(32.2)得

$$M_i=I_{ik}\Omega_k. \tag{33.1}$$

如果坐标轴 x_1,x_2,x_3 的方向沿着刚体惯量主轴，则公式(33.1)给出

$$M_1=I_1\Omega_1,\qquad M_2=I_2\Omega_2,\qquad M_3=I_3\Omega_3. \tag{33.2}$$

对于球形陀螺的特殊情况，3 个主转动惯量都相等，有

$$\boldsymbol{M}=I\boldsymbol{\Omega}, \tag{33.3}$$

即角动量矢量正比于角速度矢量，并且有相同的指向.

然而，对任意刚体，矢量 $\boldsymbol{M}$ 一般不与矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向相同，只有在刚体绕某个惯量主轴转动时，$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向才相同.

我们研究不受任何外力作用的自由刚体的运动. 我们假定消除了不感兴趣的任何匀速平动，仅考虑刚体的自由转动.

像所有封闭系统一样，自由转动刚体的角动量是常量. 对于球形陀螺，$\boldsymbol{M}=$ const 导致 $\boldsymbol{\Omega}=$ const. 这就是说，球形陀螺的最一般自由运动是绕空间固定轴的匀速转动.

转子的情况同样简单. 这时也有 $\boldsymbol{M}=I\boldsymbol{\Omega}$，并且矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 垂直于转子轴. 所以，转子的自由转动是在一个平面内绕着垂直于该平面的轴匀速转动.

利用角动量守恒定律可以确定更复杂的对称陀螺的自由转动.

利用惯量主轴 x_1,x_2 方向(垂直于陀螺对称轴 x_3)选择的任意性，我们选 x_2 垂直于矢量 $\boldsymbol{M}$ 和 x_3 轴的瞬时位置确定的平面. 那么 $M_2=0$，由公式(33.2)可知，$\Omega_2=0$. 这就是说，在每个时刻 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Omega}$ 的方向和陀螺对称轴位于同一个平面(图 46). 由此可得，在陀螺对称轴上所有点的速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$，在每个时刻都垂直于这个平面，换言之，陀螺轴绕 $\boldsymbol{M}$ 的方向匀速(见下面)转动，画出一个圆锥，这称为陀螺的规则进动). 同时，陀螺绕自身的轴匀速转动.

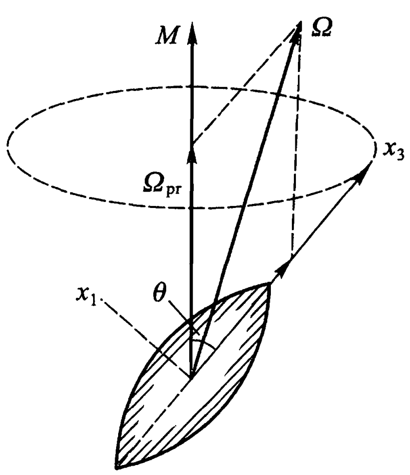


图 46

这两个转动的角速度可以容易地用给定的角

动量 M 以及陀螺轴与 $\boldsymbol{M}$ 方向的夹角 θ 表示.陀螺绕自身轴的转动角速度就是矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 在该轴上的投影 Ω_3:

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M}{I_3}\cos\theta. \tag{33.4}$$

为了求进动角速度 Ω_{pr},应该利用平行四边形法则将矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 沿着 x_3 和 $\boldsymbol{M}$ 方向分解.第一个分量不会使陀螺轴产生任何位移,第二个分量因而给出所要求的进动角速度.由图 46 可知,$\Omega_{\text{pr}}\sin\theta = \Omega_1$,由于 $\Omega_1 = M_1/I_1 = M\sin\theta/I_1$,所以得

$$\Omega_{\text{pr}} = M/I_1. \tag{33.5}$$

§ 34 刚体运动方程

由于一般情况下刚体有 6 个自由度,因此总计应该有 6 个独立的方程.这些方程可以写成刚体的动量和角动量这两个矢量对时间的导数形式.

得到第一个矢量方程只需将刚体中每个质点的方程 $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{f}$ 求和,其中 $\boldsymbol{p}$ 是质点的动量,$\boldsymbol{f}$ 是作用在质点上的力.引入刚体的总动量:

$$\boldsymbol{P} = \sum \boldsymbol{p} = \mu\boldsymbol{V}$$

和作用在刚体上总的力 $\sum\boldsymbol{f} = \boldsymbol{F}$,可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}. \tag{34.1}$$

尽管我们定义 $\boldsymbol{F}$ 为作用在每个质点上的所有力 $\boldsymbol{f}$ 之和,包括刚体的质点之间相互作用力,但事实上 $\boldsymbol{F}$ 中仅包含外力.刚体内部所有质点之间的作用力必须相互抵消,事实上,当没有外力时刚体的动量应该守恒,就像所有封闭系统一样,即应该有 $\boldsymbol{F} = 0$.

如果 U 为刚体在外场中的势能,则力 $\boldsymbol{F}$ 可以用势能对刚体质心坐标的导数确定:

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{R}}. \tag{34.2}$$

事实上,当刚体平移 $\delta\boldsymbol{R}$ 时,刚体的每个质点的径矢 $\boldsymbol{r}$ 也产生同样的变化,所以势能变化为

$$\delta U = \sum\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\delta\boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{R}\cdot\sum\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} = -\delta\boldsymbol{R}\cdot\sum\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{R}.$$

注意到,方程(34.1)也可由对质心坐标的拉格朗日方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{V}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{R}}$$

得到,其中拉格朗日函数为(32.4),对此有

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{V}} = \mu\boldsymbol{V} = \boldsymbol{P}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{R}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{R}} = \boldsymbol{F}.$$

下面推导角动量 $\boldsymbol{M}$ 对时间导数确定的第二个运动方程. 为了简化推导,我们选择固定(惯性)参考系,使得在所考虑的瞬间,刚体质心相对于该参考系静止.

我们有

$$\dot{\boldsymbol{M}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=\sum\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{p}+\sum\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{p}}.$$

对于我们所选的参考系($\boldsymbol{V}=0$),在给定时刻$\dot{\boldsymbol{r}}$与速度$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$相等. 由于矢量$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$方向相同,故$\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{p}=0$. 将$\dot{\boldsymbol{p}}$替换为$\boldsymbol{f}$,最后可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{K},\tag{34.3}$$

其中

$$\boldsymbol{K}=\sum\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}.\tag{34.4}$$

由于角动量 $\boldsymbol{M}$ 是相对质心定义的(参见 § 33 的开头部分),在从一个惯性参考系变换到另一个惯性参考系时保持不变. 由 $\boldsymbol{R}=0$ 从公式(9.5)来看这是显然的. 由此可知,根据伽利略相对性原理,这里在特定参考系下得到的公式(34.3),对所有惯性参考系都成立.

矢量 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}$ 称为$\boldsymbol{f}$ 的*力矩*,因此 $\boldsymbol{K}$ 是总力矩,即作用在刚体上的所有的力产生的力矩之和. 正如总力 $\boldsymbol{F}$ 一样,在和(34.4)中实际上只需计及外力的力矩,根据角动量守恒定律,封闭系统的所有内力的力矩之和必须等于零.

力矩像角动量一样,一般依赖于坐标原点(相对于其定义力矩)的选择. 在(34.3)和(34.4)中力矩和角动量是相对刚体质心定义的.

当坐标原点平移 $\boldsymbol{a}$ 时,刚体中每一个质点的新径矢 $\boldsymbol{r}'$与老径矢 $\boldsymbol{r}$ 的关系为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{a}$. 所以

$$\boldsymbol{K}=\sum\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}=\sum\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{f}+\sum\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{f}$$

或者

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}'+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{F}.\tag{34.5}$$

特别是,由此可见,如果总力 $\boldsymbol{F}=0$(这时称*力偶*作用在刚体上),则力矩之值不依赖于坐标原点的选择.

方程(34.3)可以看作对于“转动坐标”的拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\Omega}}=\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\varphi}}.$$

事实上,将拉格朗日函数(32.4)对矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量求导可得

$$\frac{\partial L}{\partial\Omega_i}=I_{ik}\Omega_k=M_i.$$

当刚体转动无穷小角度 $\delta\varphi$ 时,势能改变量为

$$\delta U=-\sum\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{r}=-\sum\boldsymbol{f}\cdot(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r})=-\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\sum\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{K}\cdot\delta\boldsymbol{\varphi},$$

由此可得

$$\boldsymbol{K} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varphi}}, \tag{34.6}$$

因此有

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{K}.$$

假设矢量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 相互垂直. 这种情况下总可以找到矢量 $\boldsymbol{a}$，使得公式(34.5)中 $\boldsymbol{K}'$ 等于零，进而

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{F}. \tag{34.7}$$

$\boldsymbol{a}$ 的选择不是唯一的，给它加上任何平行于 $\boldsymbol{F}$ 的矢量，都不会改变等式(34.7)，因此条件 $\boldsymbol{K}'=0$ 不是给出动坐标系中的一个点，而是一条直线. 于是，在 $\boldsymbol{K} \perp \boldsymbol{F}$ 情况下，所有作用力的效果可以归结为沿着给定直线作用的一个力 $\boldsymbol{F}$ 的效果.

均匀力场就属于这种情况，作用在质点上的力为 $\boldsymbol{f} = e\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是刻画力场的常矢量，e 刻画质点相对于给定力场的性质①. 在这种情况下有

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}\sum e, \qquad \boldsymbol{K} = \sum e\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{E}.$$

假设 $\sum e \neq 0$，引入径矢

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{\sum e\boldsymbol{r}}{\sum e}. \tag{34.8}$$

总的力矩可以简单表示为：

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{F}. \tag{34.9}$$

于是，当刚体在均匀力场中运动时，力场的效果归结为作用在径矢为(34.8)的点上的一个单一力 $\boldsymbol{F}$ 的作用. 这个点的位置完全由刚体自身的性质决定，例如，在重力场中该点就是刚体的质心.

§ 35 欧拉角

我们已经提到，描述刚体运动可以用质心的 3 个坐标和 3 个描述动坐标轴 x_1, x_2, x_3 相对固定坐标轴 X, Y, Z 取向的角度. 这些角常常可以方便地取为所谓的欧拉角.

因为我们现在只对坐标轴之间的夹角感兴趣，可以选择同一个点为两个坐标系的原点(图 47). 动坐标系的平面 x_1x_2 与固定平面 XY 相交于某一直线(在图47 上的 ON)，该直线称为节线. 节线显然垂直于 Z 轴和 x_3 轴，我们选择矢量积 $\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x}_3$ 的方向为节线正方向(其中 $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}_3$ 分别是坐标轴 Z, x_3 方向的单位

① 例如，在均匀电场中，$\boldsymbol{E}$ 是电场强度，而 e 是电荷. 在均匀重力场中，$\boldsymbol{E}$ 是重力加速度 $\boldsymbol{g}$，而 e 是质点的质量.

矢量).

我们用下面 3 个角确定动坐标轴 x_1, x_2, x_3 相对固定坐标轴 X, Y, Z 的位置: Z 轴和 x_3 轴之间的夹角 θ, X 轴和 ON 轴之间的夹角 φ, ON 轴和 x_1 轴之间的夹角 ψ. 按螺旋法则确定的方向分别绕 Z 和 x_3 轴转动来计算角 φ 和 ψ. 角 θ 取值范围是从零到 π, 而角 φ 和 ψ 的取值范围是从零到 2π①.

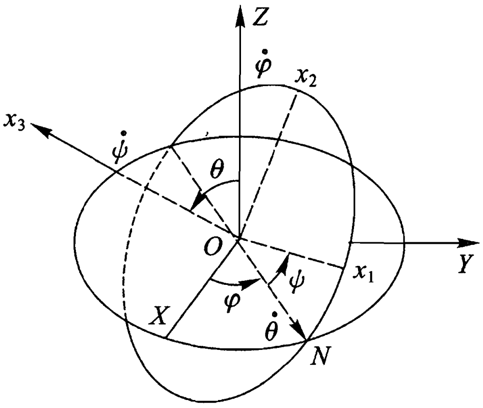


图 47

下面我们用欧拉角及其导数表示角速度矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 在动坐标轴 x_1, x_2, x_3 上的分量. 为此需要将角速度 $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ 向这些轴投影. 角速度 $\dot{\theta}$ 的方向沿着节线 ON, 它沿着 x_1, x_2, x_3 的分量等于

$$\dot{\theta}_1=\dot{\theta}\cos\psi,\qquad \dot{\theta}_2=-\dot{\theta}\sin\psi,\quad \dot{\theta}_3=0.$$

角速度 $\dot{\varphi}$ 的方向沿着 Z 轴, 它沿着 x_3 的分量等于 $\dot{\varphi}_3=\dot{\varphi}\cos\theta$, 而在平面 x_1x_2 上的投影等于 $\dot{\varphi}\sin\theta$. 将后者再分解到 x_1 和 x_2 轴, 可得

$$\dot{\varphi}_1=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi,\quad \dot{\varphi}_2=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi.$$

最后, 角速度 $\dot{\psi}$ 的方向沿着 x_3 轴.

汇集这些沿着每个轴的分量, 最终得

$$\begin{aligned}\Omega_1&=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi,\\ \Omega_2&=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi,\\ \Omega_3&=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}.\end{aligned}\tag{35.1}$$

如果选择刚体的惯量主轴为坐标轴 x_1, x_2, x_3, 则将(35.1)代入(32.8), 可得用欧拉角表示的转动动能.

对于对称陀螺, $I_1=I_2\neq I_3$, 经过简单推导可得

$$T_{\text{rot}}=\frac{I_1}{2}(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+\frac{I_3}{2}(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2.\tag{35.2}$$

应该指出, 利用对称陀螺惯量主轴 x_1, x_2 方向选择的任意性, 也可以更简单地得到这些表达式. 如果认为 x_1 轴沿着节线 ON, 即 $\psi=0$, 可得角速度分量的简单表达式

① 角 θ 和 $\varphi-\pi/2$ 分别是 x_3 轴相对 X, Y, Z 轴的极角和方位角. 同时角 θ 和 $\pi/2-\psi$ 分别是 Z 轴相对 x_1, x_2, x_3 轴的极角和方位角.

$$\Omega_1=\dot{\theta}, \qquad \Omega_2=\dot{\varphi}\sin\theta, \qquad \Omega_3=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}. \qquad (35.3)$$

作为应用欧拉角的一个简单的例子,我们研究对称陀螺的自由运动,这在§ 33 已经求出.

我们取固定坐标系的 Z 轴沿着陀螺的定常角动量 $\boldsymbol{M}$ 的方向,取动坐标系的 x_3 轴沿着陀螺对称轴,而 x_1 轴在给定时刻与节线重合. 利用公式(35.3)可得矢量 $\boldsymbol{M}$ 的分量

$$M_1=I_1\Omega_1=I_1\dot{\theta},\ M_2=I_2\Omega_2=I_2\ \dot{\varphi}\sin\theta,\ M_3=I_3\Omega_3=I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}).$$

另一方面,因为 x_1 轴(节线)垂直于 Z 轴,我们有

$$M_1=0, \qquad M_2=M\sin\theta, \qquad M_3=M\cos\theta.$$

比较这些等式可得下面方程:

$$\dot{\theta}=0, \quad I_1\ \dot{\varphi}=M, \quad I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})=M\cos\theta. \qquad (35.4)$$

第一个方程给出 $\theta=\text{const}$,即陀螺轴与 $\boldsymbol{M}$ 方向的夹角为常数. 第二个方程确定进动角速度(与(33.5)一致)$\dot{\varphi}=M/I_1$. 最后,第三个方程确定陀螺绕自身轴转动的角速度 $\Omega_3=M\cos\theta/I_3$.

习 题

习题 1 试将下端点固定的对称重陀螺的运动问题约化为积分问题(图 48).

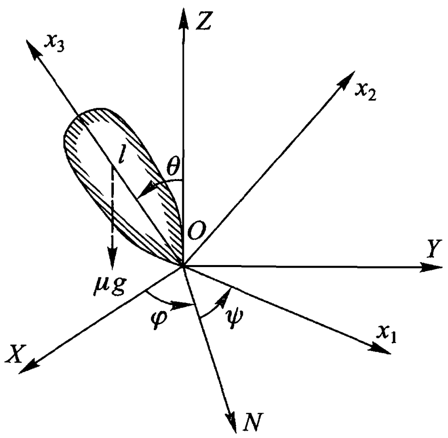


图 48

解:取动坐标系和固定坐标系的共同原点位于陀螺的固定点 O,而 Z 轴沿着竖直方向(图 48). 重力场中陀螺的拉格朗日函数为

$$L=\frac{I_1+\mu\ l^2}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{I_3}{2}(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^2-\mu gl\cos\theta$$

其中 μ 为陀螺的质量，l 是质心到固定点的距离.

ψ 和 φ 是循环坐标. 所以有两个运动积分：

$$p_\psi=\frac{\partial L}{\partial\dot\psi}=I_3(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)=\mathrm{const}\equiv M_3,\tag{1}$$

$$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=(I_1'\sin^2\theta+I_3\cos^2\theta)\dot\varphi+I_3\dot\psi\cos\theta=\mathrm{const}\equiv M_Z,\tag{2}$$

其中引入了记号 $I_1'=I_1+\mu l^2$，p_ψ 和 p_φ 是相对 O 点定义的转动角动量分别在 x_3 轴和 Z 轴上的分量. 此外还有能量守恒：

$$E=\frac{I_1'}{2}(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta)+\frac{I_3}{2}(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)^2+\mu gl\cos\theta.\tag{3}$$

由方程(1)和(2)求得

$$\dot\varphi=\frac{M_Z-M_3\cos\theta}{I_1'\sin^2\theta},\tag{4}$$

$$\dot\psi=\frac{M_3}{I_3}-\cos\theta\,\frac{M_Z-M_3\cos\theta}{I_1'\sin^2\theta}.\tag{5}$$

利用方程(4)和(5)从能量方程(3)中消去 $\dot\varphi$ 和 $\dot\psi$，得

$$E'=\frac{I_1'}{2}\dot\theta^2+U_{\mathrm{eff}}(\theta),$$

其中引入了记号

$$E'=E-\frac{M_3^2}{2I_3}-\mu gl,\qquad U_{\mathrm{eff}}(\theta)=\frac{(M_Z-M_3\cos\theta)^2}{2I_1'\sin^2\theta}-\mu gl(1-\cos\theta).\tag{6}$$

由此求出 $\dot\theta$ 并分离变量得

$$t=\int\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1'}[E'-U_{\mathrm{eff}}(\theta)]}},\tag{7}$$

该积分是椭圆积分. 然后，利用方程(4)和(5)所得的积分将角 φ 和 ψ 写成 θ 的函数形式.

在运动过程中，角 θ 的变化范围由条件 $E'\geqslant U_{\mathrm{eff}}(\theta)$ 确定. 当 θ 趋于 0 或 π 时，函数 $U_{\mathrm{eff}}(\theta)$(如果 $M_3\neq M_Z$)趋于 $+\infty$，而当处于 $0,\pi$ 之间时函数有一个极小值. 所以方程 $E'=U_{\mathrm{eff}}(\theta)$ 有两个根，它们确定陀螺轴偏离竖直方向的两个极限值 θ_1 和 θ_2.

当角 θ 从 θ_1 变化到 θ_2，$\dot\varphi$ 的符号是否改变取决于 $M_2-M_3\cos\theta$ 的符号在 θ 角的变化范围内是否改变. 如果它不改变符号，陀螺轴绕竖直方向单调进动，同时上下振动(称为章动)(见图 49a，曲线是陀螺轴在以固定点为球心的球面上所画的轨迹). 如果 $\dot\varphi$ 改变符号下，在两个极限圆上进动方向相反，因此陀螺轴绕竖直方向移动时画

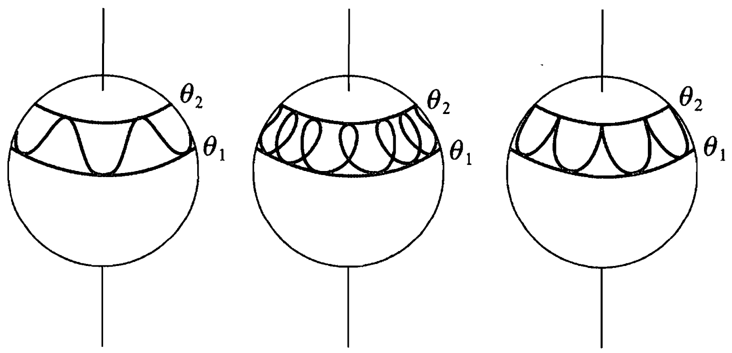


图 49

出环路(图 49b).最后,如果 θ_1 和 θ_2 之中有一个与 $M_Z-M_3\cos\theta$ 的零点重合,则在相应的极限圆上$\dot{\varphi}$和$\dot{\theta}$同时等于零,陀螺轴画出图 49c 类型的轨迹.

习题 2 试求陀螺轴绕竖直方向转动稳定的条件.

解:当 $\theta=0$ 时 Z 和 x_3 轴重合,因此 $M_3=M_Z$,$E'=0$.如果 $\theta=0$ 相应于 $U_{\text{eff}}(\theta)$的极小值,则陀螺绕该轴的转动是稳定的.当 θ 很小时有

$$U_{\text{eff}}\approx\left(\frac{M_3^2}{8I_1'}-\frac{\mu gl}{2}\right)\theta^2,$$

由此可得稳定条件为 $M_3^2>4I_1'\mu gl$ 或者

$$\Omega_3^2>\frac{4I_1'\mu gl}{I_3^2}.$$

习题 3 试求自转动能远大于重力势能情况下陀螺的运动(称为快陀螺).

解:在一阶近似下,即忽略重力场时,陀螺轴绕着角动量 $\boldsymbol{M}$ 的方向自由进动.这种情况对应于陀螺的章动),根据(33.5),进行角速度为

$$\Omega_{\text{nut}}=\frac{M}{I_1'}. \tag{1}$$

在下一级近似中会出现 $\boldsymbol{M}$ 绕竖直方向的慢速进动(图 50).为了求这种进动的角速度,我们将精确的运动方程(34.3)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{K}$$

按章动周期平均.作用在陀螺上的重力矩等于 $\boldsymbol{K}=\mu l\boldsymbol{n}_3\times\boldsymbol{g}$,其中 $\boldsymbol{n}_3$ 是沿陀螺轴方向的单位矢量.很显然,由对称性,$\boldsymbol{K}$ 按"章动锥"平均的结果是将矢量 $\boldsymbol{n}_3$ 替换为其在 $\boldsymbol{M}$ 方向的投影 $\cos\alpha\boldsymbol{M}/M$($\alpha$ 是 $\boldsymbol{M}$ 与陀螺轴之间的夹角).于是得方程

$$\overline{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}}=-\cos\alpha\,\frac{\mu l}{M}\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{M}.$$

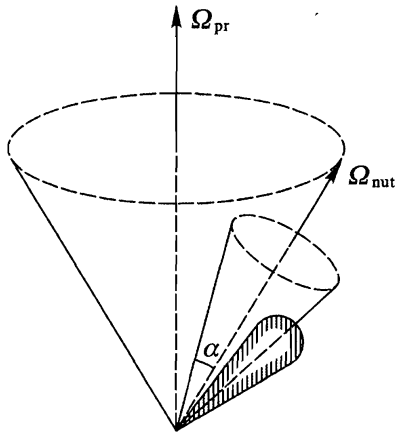


图 50

这表明,矢量 $\boldsymbol{M}$ 以比 Ω_{nut} 小得多的平均角速度

$$\overline{\boldsymbol{\Omega}}_{pr}=-\frac{\mu l\cos\alpha}{M}\boldsymbol{g} \tag{2}$$

绕 $\boldsymbol{g}$ 的方向(即竖直方向)进动.

在我们所进行的近似中,公式(1)和(2)中的量 M 和 $\cos\alpha$ 都是常数,尽管严格地说,它们不是精确的运动积分.在相同的准确度下,它们与严格的守恒量 E 和 M_3 之间的关系为

$$M_3=M\cos\alpha,\qquad E\approx\frac{M^2}{2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{I_3}+\frac{\sin^2\alpha}{I_1'}\right).$$

§36　欧拉方程

在§34 中的运动方程是相对固定坐标系的:在方程(34.1)和(34.3)中的导数 $\mathrm{d}\boldsymbol{P}/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{M}/\mathrm{d}t$ 是矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 相对这个坐标系的变化率.但是,刚体转动角动量 $\boldsymbol{M}$ 的分量与角速度分量之间的关系,在以惯量主轴为坐标轴的动坐标系中更简单.为了利用这个关系,必须先将运动方程变换到相对动坐标系 x_1, x_2, x_3 表示的形式.

设 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}/\mathrm{d}t$ 是任意矢量 $\boldsymbol{A}$ 相对固定坐标系的变化率.如果矢量 $\boldsymbol{A}$ 相对动坐标系不变化,则它相对固定坐标系的变化率只是由转动引起的,于是

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A}$$

参见§9,其中已指出公式(9.1)和(9.2)等对任意矢量都成立.一般情况下,这个等式右端也应该加入矢量 $\boldsymbol{A}$ 相对动坐标系的变化率,我们记这个变化率为 $\mathrm{d}'\boldsymbol{A}/\mathrm{d}t$,可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A}. \tag{36.1}$$

利用这个一般公式,我们立即可以将方程(34.1)和(34.3)写成

$$\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{P}=\boldsymbol{F},\qquad \frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{M}=\boldsymbol{K}. \tag{36.2}$$

因为是在动坐标系中对时间的求导,我们可以将方程(36.2)写成沿动坐标系各坐标轴的分量形式,并记

$$\left(\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}\right)_1=\frac{\mathrm{d}\,P_1}{\mathrm{d}t},\quad \cdots,\quad \left(\frac{\mathrm{d}'\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t}\right)_1=\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}t},\cdots,$$

其中下标 1,2,3 表示沿坐标轴 x_1,x_2,x_3 的分量. 在第一个方程中用 $\mu\boldsymbol{V}$ 代替 $\boldsymbol{P}$,得

$$\begin{aligned}
\mu\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}+\Omega_2V_3-\Omega_3V_2\right)&=F_1,\\
\mu\left(\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t}+\Omega_3V_1-\Omega_1V_3\right)&=F_2,\\
\mu\left(\frac{\mathrm{d}V_3}{\mathrm{d}t}+\Omega_1V_2-\Omega_2V_1\right)&=F_3.
\end{aligned} \tag{36.3}$$

如果轴 x_1,x_2,x_3 是三个惯量主轴,则(36.2)的第二个方程中 $M_1=I_1\Omega_1$,等等,有

$$\begin{aligned}
I_1\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}t}+(I_3-I_2)\Omega_2\Omega_3&=K_1,\\
I_2\frac{\mathrm{d}\Omega_2}{\mathrm{d}t}+(I_1-I_3)\Omega_3\Omega_1&=K_2,\\
I_3\frac{\mathrm{d}\Omega_3}{\mathrm{d}t}+(I_2-I_1)\Omega_1\Omega_2&=K_3.
\end{aligned} \tag{36.4}$$

方程(36.4)称为*欧拉方程*.

在自由转动时 $\boldsymbol{K}=0$,欧拉方程变为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}t}+\frac{I_3-I_2}{I_1}\Omega_2\Omega_3&=0,\\
\frac{\mathrm{d}\Omega_2}{\mathrm{d}t}+\frac{I_1-I_3}{I_2}\Omega_3\Omega_1&=0,\\
\frac{\mathrm{d}\Omega_3}{\mathrm{d}t}+\frac{I_2-I_1}{I_3}\Omega_1\Omega_2&=0.
\end{aligned} \tag{36.5}$$

作为例子,我们将这些方程应用于已经讨论过的对称陀螺的自由转动. 设 $I_1=I_2$,由第 3 个方程可知,$\dot{\Omega}_3=0$,即 $\Omega_3=\text{const}$. 第 1 和第 2 个方程于是可写成

$$\dot{\Omega}_1=-\omega\Omega_2,\quad \dot{\Omega}_2=\omega\Omega_1,$$

其中引入了常量

$$\omega=\Omega_3\frac{I_3-I_1}{I_1}. \tag{36.6}$$

将第 2 个方程乘以 i 加上第 1 个方程，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Omega_1+\mathrm{i}\Omega_2)=\mathrm{i}\omega(\Omega_1+\mathrm{i}\Omega_2),$$

由此得

$$\Omega_1+\mathrm{i}\Omega_2=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

其中 A 为常数，只要选取适当的时间起始点，就可以使 A 为实数，那么

$$\Omega_1=A\cos\omega t,\quad \Omega_2=A\sin\omega t. \tag{36.7}$$

这个结果表明，角速度在垂直陀螺对称轴的平面上的分量的大小为常量($\sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2}=A$)，并且该分量以角速度 ω 旋转. 由于在陀螺轴上的投影 Ω_3 也是常量，故可以断定矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的大小不变，并以角速度 ω 绕陀螺轴匀速旋转. 由于 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量之间的关系为 $M_1=I_1\Omega_1, M_2=I_2\Omega_2, M_3=I_3\Omega_3$，显然，角动量矢量 $\boldsymbol{M}$ 相对于陀螺的对称轴也作类似的运动.

这里所得的结果本质上是 § 33 和 § 35 中相对固定坐标系研究结果的另一种表示. 特别地，角动量矢量 $\boldsymbol{M}$(沿图 48 中的 Z 轴方向)绕 x_3 轴转动的角速度用欧拉角表示时等于角速度 $-\dot{\psi}$. 利用方程(35.4)有

$$\dot{\psi}=\frac{M\cos\theta}{I_3}-\dot{\varphi}\cos\theta=M\cos\theta\left(\frac{1}{I_3}-\frac{1}{I_1}\right)$$

或者有

$$-\dot{\psi}=\Omega_3\frac{I_3-I_1}{I_1}.$$

这与(36.6)一致.

§ 37　非对称陀螺

我们利用欧拉方程研究更复杂的问题，即研究 3 个主转动惯量各不相等的非对称陀螺的自由转动. 为确定起见，假定

$$I_3>I_2>I_1. \tag{37.1}$$

我们早就知道欧拉方程的两个积分，分别由能量守恒定律和角动量守恒定律给出

$$I_1\Omega_1^2+I_2\Omega_2^2+I_3\Omega_3^2=2E,$$
$$I_1^2\Omega_1^2+I_2^2\Omega_2^2+I_3^2\Omega_3^2=M^2, \tag{37.2}$$

其中能量 E 和角动量的大小 M 是给定常数. 这两个等式可以用 $\boldsymbol{M}$ 的分量表示为

$$\frac{M_1^2}{I_1}+\frac{M_2^2}{I_2}+\frac{M_3^2}{I_3}=2E, \tag{37.3}$$

$$M_1^2+M_2^2+M_3^2=M^2. \tag{37.4}$$

由这些方程可以得出陀螺运动的一些特性. 为此我们注意到, 在以 M_1, M_2, M_3 为轴的坐标系中, 方程(37.3)和(37.4)分别是半轴为

$$\sqrt{2EI_1},\quad \sqrt{2EI_2},\quad \sqrt{2EI_3}$$

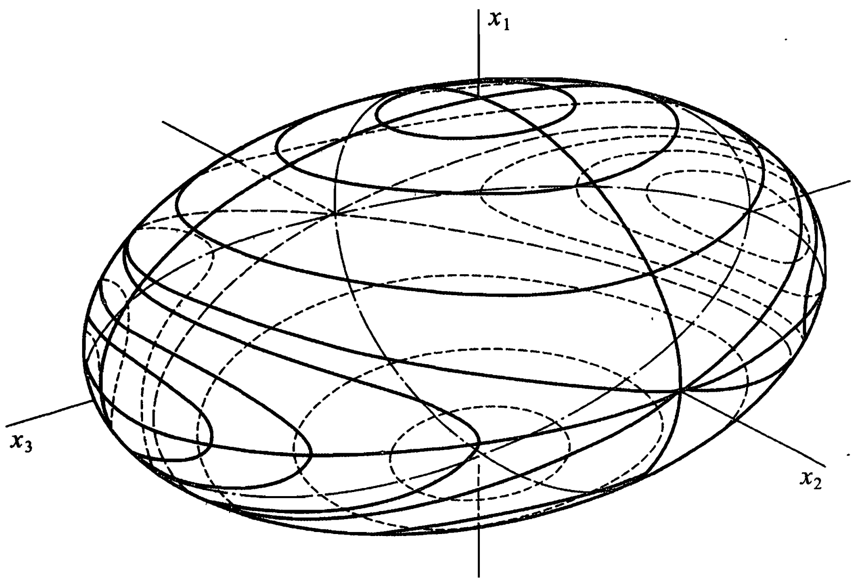


图 51

的椭球面方程和半径为 M 的球面方程. 当矢量 $\boldsymbol{M}$ 相对陀螺的惯量轴移动时, 其端点沿着这两个曲面的交线运动. 图 51 中画出了椭球与不同半径的球面的一系列这样的交线. 交线存在的条件由显然成立的不等式给出

$$2EI_1<M^2<2EI_3, \tag{37.5}$$

它表示球(37.4)的半径介于椭球(37.3)的长半轴和短半轴之间.

我们研究(给定能量 E 时) M 的变化引起矢量 $\boldsymbol{M}$ 端点① 的轨迹性质的变化. 当 M^2 略大于 $2EI_1$ 时, 球和椭球相交于椭球极点附近围绕 x_1 轴的两条很小的封闭曲线. 当 $M^2\to 2EI_1$ 时, 两条曲线分别收缩到极点. 随着 M^2 继续增大曲线扩大, 当 $M^2=2EI_2$ 时, 曲线变成两条平面曲线(椭圆), 并相交于椭球在 x_2 轴上的极点. M^2 再继续增大, 两条分离的封闭曲线重现, 但这次是围绕 x_3 轴上的极点. 当 $M^2\to 2EI_3$ 时, 这两条曲线收缩到两个极点.

首先应该指出, 轨迹的封闭性意味着矢量 $\boldsymbol{M}$ 相对陀螺的运动是周期性的,

① 矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 端点画出的相应曲线称为本体瞬心迹.

在一个周期内矢量 $\boldsymbol{M}$ 画出某条圆锥曲线并回到原来位置.

其次,应该注意到,在椭球不同极点附近的轨迹的性质有本质的差别.在 x_1 轴和 x_3 轴附近,轨迹完全位于相应的极点周围,但是,通过 x_2 轴上的极点附近的轨迹将远离这些极点.这种差别相应于陀螺绕 3 个惯量主轴转动有不同的稳定性.绕 x_1 轴和 x_3 轴(相应于陀螺 3 个转动惯量中的最小值和最大值)的转动是稳定的,即如果使陀螺偏离这些状态很小时,陀螺将继续在初始状态附近运动.然而,绕 x_2 轴的转动是不稳定的,即任意小的偏离都足以引起陀螺远离其初始位置的运动.

为了确定 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量(或者正比于它们的 $\boldsymbol{M}$ 的分量)对时间的依赖关系,我们利用欧拉方程(36.5).利用方程(37.2)将 Ω_1 和 Ω_3 用 Ω_2 表示:

$$\Omega_1^2=\frac{1}{I_1(I_3-I_1)}[(2EI_3-M^2)-I_2(I_3-I_2)\Omega_2^2],$$

$$\Omega_3^2=\frac{1}{I_3(I_3-I_1)}[(M^2-2EI_1)-I_2(I_2-I_1)\Omega_2^2], \tag{37.6}$$

并代入(36.5)的第二个方程,得

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_2}{\mathrm{d}t}=\frac{I_3-I_1}{I_2}\Omega_1\Omega_3=\frac{1}{I_2\sqrt{I_1I_3}}\{[2EI_3-M^2)-I_2(I_3-I_2)\Omega_2^2][(M^2-2EI_1)-I_2(I_2-I_1)\Omega_2^2]\}^{1/2}. \tag{37.7}$$

将这个方程分离变量并积分,得到用椭圆积分表示的函数 $t(\Omega_2)$.在化为标准形式时,为确定起见我们假设

$$M^2>2EI_2$$

如果不等式反向,在下面的所有公式中对调下标 1 和 3.我们用下列新变量替换 t 和 Ω_2:

$$\tau=t\sqrt{\frac{(I_3-I_2)(M^2-2EI_1)}{I_1I_2I_3}},\quad s=\Omega_2\sqrt{\frac{I_2(I_3-I_2)}{2EI_3-M^2}}, \tag{37.8}$$

并引进正参数 $k^2<1$ 如下:

$$k^2=\frac{(I_2-I_1)(2EI_3-M^2)}{(I_3-I_2)(M^2-2EI_1)}. \tag{37.9}$$

于是有

$$\tau=\int_0^s\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

(选择时间起始点为 $\Omega_2=0$ 时刻).反解这个积分可得雅可比椭圆函数

$$s=\mathrm{sn}\,\tau,$$

由此函数给出 Ω_2 对时间的依赖关系.根据等式(37.6),函数 $\Omega_1(t)$ 和 $\Omega_3(t)$ 可由 $\Omega_2(t)$ 的代数函数给出.考虑到另外两个椭圆函数的定义

$$\mathrm{cn}\tau=\sqrt{1-\mathrm{sn}^2\tau},\quad \mathrm{dn}\tau=\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2\tau},$$

最后可得下面公式：

$$\begin{aligned}\Omega_1&=\sqrt{\frac{2EI_3-M^2}{I_1(I_3-I_1)}}\mathrm{cn}\tau,\\ \Omega_2&=\sqrt{\frac{2EI_3-M^2}{I_2(I_3-I_2)}}\mathrm{sn}\tau,\\ \Omega_3&=\sqrt{\frac{M^2-2EI_1}{I_3(I_3-I_1)}}\mathrm{dn}\tau.\end{aligned} \tag{37.10}$$

函数(37.10)是周期的，对变量 τ 的周期为 $4K$，其中 K 是第一类完全椭圆积分：

$$K=\int_0^1\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin^2u}}. \tag{37.11}$$

因而对时间 t 的周期为

$$T=4K\sqrt{\frac{I_1I_2I_3}{(I_3-I_2)(M^2-2EI_1)}}. \tag{37.12}$$

经过这段时间 T 之后，相对于陀螺的轴而言，矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 回到原位置. 然而相对固定坐标系，陀螺自身并不会回到原位置，见下文.

当 $I_1=I_2$ 时，公式(37.10)当然退化为 § 36 得到的对称陀螺的公式. 事实上，当 $I_1\to I_2$ 时，参数 $k^2\to0$，椭圆函数退化为三角函数

$$\mathrm{sn}\tau\to\sin\tau,\quad \mathrm{cn}\tau\to\cos\tau,\quad \mathrm{dn}\tau\to1,$$

于是公式(37.10)就变回到公式(36.7).

当 $M^2=2EI_3$ 时有：$\Omega_1=\Omega_2=0$，$\Omega_3=\mathrm{const}$，即矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向总是沿着对称轴 x_3，这相应于陀螺绕 x_3 轴匀速转动. 类似地，当 $M^2=2EI_1$ 时(这时 $\tau\equiv0$)，陀螺绕 x_1 轴匀速转动.

下面我们研究陀螺在空间中的绝对运动，即相对于固定坐标系 X,Y,Z 的运动. 为此我们利用陀螺轴 x_1,x_2,x_3 和坐标轴 X,Y,Z 之间的欧拉角 ψ,φ,θ，并选取固定的 Z 轴沿着常矢量 $\boldsymbol{M}$ 的方向. 由于方向 Z 相对 x_1,x_2,x_3 轴的极角和方位角分别等于 θ 和 $\pi/2-\psi$(参见 § 35 中的脚注)，则取矢量 $\boldsymbol{M}$ 沿 x_1,x_2,x_3 轴的分量可得

$$\begin{aligned}M\sin\theta\sin\psi&=M_1=I_1\Omega_1,\\ M\sin\theta\cos\psi&=M_2=I_2\Omega_2,\\ M\cos\theta&=M_3=I_3\Omega_3.\end{aligned} \tag{37.13}$$

由此得

$$\cos\theta=\frac{I_3\Omega_3}{M},\quad \tan\psi=\frac{I_1\Omega_1}{I_2\Omega_2}, \tag{37.14}$$

利用公式(37.10)得

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{I_3(M^2-2EI_1)}{M^2(I_3-I_1)}}\mathrm{dn}\tau,$$

$$\tan\psi=\sqrt{\frac{I_1(I_3-I_2)}{I_2(I_3-I_1)}}\frac{\mathrm{cn}\tau}{\mathrm{sn}\tau},\tag{37.15}$$

由此获得角 θ 和 ψ 对时间的依赖关系，与矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量一样，它们是时间的周期为(37.12)的周期函数.

在公式(37.13)中没有角 φ，为了计算这个角，需要利用公式(35.1)，该公式用欧拉角对时间的导数表示 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量.从等式

$$\Omega_1=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi,$$

$$\Omega_2=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi,$$

消去 $\dot{\theta}$，可得

$$\dot{\varphi}=\frac{\Omega_1\sin\psi+\Omega_2\cos\psi}{\sin\theta},$$

然后利用公式(37.13)，可得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=M\frac{I_1\Omega_1^2+I_2\Omega_2^2}{I_1^2\Omega_1^2+I_2^2\Omega_2^2}.\tag{37.16}$$

由此可通过积分来确定函数 $\varphi(t)$，但被积表达式以复杂的方式涉及椭圆函数.经过一系列复杂的变换，可以将这个积分表示为 Θ - 函数，我们这里不进行具体计算仅给出最后结果.①

函数 $\varphi(t)$(除了任意的可加常数外)可以写成下面两项之和

$$\varphi(t)=\varphi_1(t)+\varphi_2(t),\tag{37.17}$$

$\varphi_1(t)$由下式给出：

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi_1(t)}=\frac{\vartheta_{01}(2t/T-\mathrm{i}\alpha)}{\vartheta_{01}(2t/T+\mathrm{i}\alpha)},\tag{37.18}$$

其中 ϑ_{01}是 Θ - 函数，α 是实常数，并由下式确定：

$$\mathrm{sn}(\mathrm{i}\cdot 2\alpha K)=\mathrm{i}\sqrt{\frac{I_3(M^2-2EI_1)}{I_1(2EI_3-M^2)}}\tag{37.19}$$

(K 和 T 由公式(37.11)和(37.12)给出).(37.18)右端是周期为 $T/2$ 的周期函数，因此 $\varphi_1(t)$在时间 T 内变化 2π.(37.17)中的 $\varphi_2(t)$由下面公式给出：

---

① 参见：Е. Т. Уиттекер. Аналитическая динамика. – М.: ОНТИ, 1937. Whittaker E T. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, 4th ed, Chapter VI. Dover, New York, 1944.

$$\varphi_2(t)=2\pi\frac{t}{T'},\quad \frac{1}{T'}=\frac{M}{2\pi I_1}-\frac{\mathrm{i}}{\pi T}\frac{\vartheta'_{01}(\mathrm{i}\alpha)}{\vartheta_{01}(\mathrm{i}\alpha)}. \tag{37.20}$$

这个函数在时间 T' 内增加 2π.

可见,φ 是两个周期函数之和,并且一个的周期(T)与角 ψ 和 θ 的变化周期相同,另一个的周期(T')与前一个是无公度的.这种无公度性导致陀螺永远不可能精确地回到它的初始位置.

习　　题

习题 1　试求陀螺绕惯量主轴 x_3(或 x_1)附近轴的自由转动.

解:设 x_3 轴靠近 $\boldsymbol{M}$ 的方向.那么分量 M_1 和 M_2 是小量,而 $M_3\approx M$(精确到一阶小量).在相同的精度下,欧拉方程(36.5)的前两个可写为

$$\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}t}=\left(1-\frac{I_3}{I_2}\right)\Omega_0M_2,\quad \frac{\mathrm{d}M_2}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)\Omega_0M_1,$$

这里我们引入了记号 $\Omega_0=M/I_3$.我们来求 M_1,M_2 的正比于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 的解,对于频率 ω 可得

$$\omega=\Omega_0\sqrt{\left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)\left(\frac{I_3}{I_2}-1\right)}. \tag{1}$$

对于 M_1,M_2,我们有

$$M_1=Ma\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\cos\omega t,\quad M_2=Ma\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}\sin\omega t, \tag{2}$$

其中 a 是任意的小常数.矢量 $\boldsymbol{M}$ 相对陀螺的运动由这些公式确定,在图 51 中矢量 $\boldsymbol{M}$ 的端点(以频率 ω)绕着 x_3 轴上的极点画出小椭圆.

为了确定陀螺在空间中的绝对运动,我们来求其欧拉角.在现在的情况下,x_3 轴和 Z 轴(沿 $\boldsymbol{M}$ 的方向)之间的夹角 θ 是小量,根据公式(37.14)有

$$\tan\psi=\frac{M_1}{M_2},\quad \theta^2\approx2(1-\cos\theta)=2\left(1-\frac{M_3}{M}\right)\approx\frac{M_1^2+M_2^2}{M^2},$$

将(2)代入,得

$$\tan\psi=\sqrt{\frac{I_1(I_3-I_2)}{I_2(I_3-I_1)}}\cot\omega t,$$

$$\theta^2=a^2\left[\left(\frac{I_3}{I_2}-1\right)\cos^2\omega t+\left(\frac{I_3}{I_1}-1\right)\sin^2\omega t\right]. \tag{3}$$

为了计算角 φ,我们注意到,根据(35.1)中的第 3 个方程,当 $\theta\ll1$ 时有

$$\Omega_0\approx\Omega_3\approx\dot{\psi}+\dot{\varphi}.$$

所以

$$\varphi=\Omega_0 t-\psi$$

(略去了任意积分常数).

如果直接观察陀螺 3 个惯性主轴方向的变化(沿着这些轴的单位矢量为 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3$),可以获得陀螺运动性质的更清晰的理解. 矢量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 在平面 XY 内以频率 Ω_0 匀速转动,同时以频率 ω 沿着横向作微振动,这些振动由这两个单位矢量的 Z 方向分量确定,对这些分量有

$$n_{1Z}\approx\frac{M_1}{M}=a\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\cos\omega t,$$

$$n_{2Z}\approx\frac{M_2}{M}=a\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}\sin\omega t.$$

在相同的精度下,对于矢量 $\boldsymbol{n}_3$ 有

$$n_{3X}\approx\theta\sin\varphi,\quad n_{3Y}\approx-\theta\cos\varphi,\quad n_{3Z}\approx 1$$

($\boldsymbol{n}_3$ 的方向相对 X,Y,Z 轴的极角和方位角等于 θ 和 $\varphi-\pi/2$,参见第 §35 的脚注). 进而有(利用公式(37.13)):

$$\begin{aligned}n_{3X}&=\theta\sin(\Omega_0 t-\psi)=\theta\sin\Omega_0 t\cos\psi-\theta\cos\Omega_0 t\sin\psi\\&=\frac{M_2}{M}\sin\Omega_0 t-\frac{M_1}{M}\cos\Omega_0 t\\&=a\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}\sin\Omega_0 t\sin\omega t-a\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\cos\Omega_0 t\cos\omega t,\end{aligned}$$

或者最后得

$$\begin{aligned}n_{3X}=&-\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}+\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\right)\cos[(\Omega_0+\omega)t]+\\&\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}-\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\right)\cos[(\Omega_0-\omega)t].\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}n_{3Y}=&-\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}+\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\right)\sin[(\Omega_0+\omega)t]+\\&\frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{I_3}{I_1}-1}-\sqrt{\frac{I_3}{I_2}-1}\right)\sin[(\Omega_0-\omega)t].\end{aligned}$$

由此可知,矢量 $\boldsymbol{n}_3$ 的运动是以频率($\Omega_0\pm\omega$)绕 Z 轴的两个转动的叠加.

习题 2　试求 $M^2=2EI_2$ 情况下陀螺的自由转动.

解:在图 51 上,这种情况相应于矢量 $\boldsymbol{M}$ 的端点沿着过 x_2 轴上极点的曲线运动.

方程(37.7)和(37.8)变为如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}=1-s^2,\quad \tau=t\sqrt{\frac{(I_2-I_1)(I_3-I_2)}{I_1I_3}}\Omega_0,\quad s=\frac{\Omega_2}{\Omega_0},$$

其中引入了记号 $\Omega_0=M/I_2=2E/M$. 积分这个方程,然后利用公式(37.6),可得

$$\begin{aligned}\Omega_1&=\Omega_0\sqrt{\frac{I_2(I_3-I_2)}{I_1(I_3-I_1)}}\frac{1}{\cosh\tau},\\ \Omega_2&=\Omega_0\tanh\tau,\\ \Omega_3&=\Omega_0\sqrt{\frac{I_2(I_2-I_1)}{I_3(I_3-I_1)}}\frac{1}{\cosh\tau}.\end{aligned}\tag{1}$$

为了确定陀螺的绝对运动,我们引入欧拉角,定义 θ 为 Z 轴($\boldsymbol{M}$ 的方向)与陀螺惯量主轴 x_2(不是正文中的 x_3)之间的夹角. 在给出矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的分量与欧拉角关系的公式(37.14)和(37.16)中,将下标循环置换 123→312. 然后将(1)式代入这些公式,可得

$$\cos\theta=\tanh\tau,\quad \varphi=\Omega_0t+\text{const},\quad \tan\psi=\sqrt{\frac{I_3(I_2-I_1)}{I_1(I_3-I_2)}}.$$

由所得公式可知,当 $t\to\infty$ 时,矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 渐近地趋于 x_2 轴,同时 x_2 轴渐近地趋于固定轴 Z.

§ 38　刚体的接触

由运动方程(34.1)和(34.3)可知,刚体平衡条件是作用在刚体上的总力和总力矩等于零:

$$\boldsymbol{F}=\sum\boldsymbol{f}=0,\quad \boldsymbol{K}=\sum\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}=0.\tag{38.1}$$

这里的求和是对作用在刚体上的所有外力,而 $\boldsymbol{r}$ 是力的作用点的径矢. 这时定义力矩的点(坐标原点)可以任意选择:因为当 $\boldsymbol{F}=0$ 时,$\boldsymbol{K}$ 的值不依赖于这个点的选择(参见(34.5)).

如果我们研究两个相互接触的刚体系统,则平衡条件(38.1)应该对每个刚体成立. 这时外力应该包括作用在给定刚体上的其它与之接触的刚体的作用力. 这些作用在刚体接触点上的力称为*反作用力*. 显然,任意两个刚体的相互反作用力大小相等方向相反.

一般情况下,确定反作用力的大小和方向,需要联立求解所有刚体的平衡方程组(38.1). 然而,在某些情况下,反作用力的方向可以由问题的条件直接给出. 例如,如果两个刚体可以沿着接触面相互自由滑动,则反作用力的方向沿着接触面的法线.

如果两个接触刚体相对运动，则除了反作用力，还会出现摩擦力这样的耗散力.

接触的刚体有两种可能类型的相对运动：*滑动*和*滚动*. 在滑动时反作用力垂直于接触面，而摩擦力则与接触面相切.

纯滚动的特点是在接触点各刚体没有相对运动，换句话说，在每个瞬间，滚动刚体的接触点就如同被固定一样. 这时反作用力的方向是任意的，即不一定垂直接触面. 滚动摩擦力以附加力矩的形式阻碍滚动.

如果滑动摩擦力足够小，可以忽略，则称刚体接触面*绝对光滑*. 反之，如果接触面的性质决定刚体只能作无滑动的纯滚动，而滚动摩擦力可以忽略，则称接触面*绝对粗糙*.

在这两种情况下，摩擦力不明显地出现在刚体运动问题中，因此问题是纯力学的. 如果摩擦力的性质在确定运动时起着非常重要的作用，则该运动不是纯力学过程(参见§25).

两个刚体的接触使它们的自由度比自由运动时有所减少. 到目前为止，在讨论这样的问题时，我们通过使用直接对应于实际自由度数的坐标考虑了这种自由度的减少. 然而，对于刚体的滚动，可能不能作这样一种坐标的选择.

对滚动刚体的运动所施加的条件是两个刚体上接触点速度相等. 例如，刚体沿固定表面滚动时，接触点速度应该等于零. 一般情况下，这个条件可表示为下列形式的*约束方程*

$$\sum_i c_{\alpha i}\dot{q}_i = 0, \tag{38.2}$$

其中 $c_{\alpha i}$只是坐标的函数(下标 α 是约束方程的编号). 如果这些方程的左边不是坐标的某些函数对时间的全导数，则这些方程是不可积的. 换句话说，这些方程不能转化为仅仅是一些坐标之间的关系式，利用这些关系式，可以用与实际自由度数相应的较少坐标来描述刚体的位置. 这样的约束称为*非完整约束*，与仅在坐标之间施加关系的*完整约束*相反.

例如，我们研究球沿着平面的滚动. 如通常那样，我们用 $\boldsymbol{V}$ 表示平动速度(即球心的速度)，用 $\boldsymbol{\Omega}$ 表示球转动角速度. 如果在一般公式$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$ 中令 $\boldsymbol{r} = -a\boldsymbol{n}$($a$ 为球的半径，$\boldsymbol{n}$ 为平面在接触点的法向单位矢量)，则可得球与平面接触点的速度. 我们要求的约束是在接触点没有滑动的条件，即由下面方程给出的条件

$$\boldsymbol{V} - a(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{n}) = 0. \tag{38.3}$$

这个方程不可积：虽然速度 $\boldsymbol{V}$ 是球心径矢对时间的全导数，但角速度一般情况

下不是某个坐标对时间的全导数.因此,(38.3)是非完整约束[①].

由于非完整约束的方程不能用来减少坐标数,所以存在这样的约束就必须使用非全部独立的坐标.为了导出相应的拉格朗日方程,我们重新回到最小作用量原理.

存在形式为(38.2)的约束对坐标变分的可能取值附加了某些限制.就是说,在该方程两边乘以 δt,我们可以发现变分 δq_i 不是独立的,它们满足关系式

$$\sum_i c_{\alpha i}\delta q_i = 0. \tag{38.4}$$

在对作用量变分时必须考虑这个关系式.根据求条件极值的拉格朗日方法,应该给作用量变分

$$\delta S = \int \sum_i \delta q_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\mathrm{d}t$$

的被积函数加上方程(38.4)的左边与不定乘子 λ_α(坐标的函数)相乘以后的表达式,然后令积分等于零.这时可以认为所有变分 δq_i 是完全独立的,可得方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_\alpha \lambda_\alpha c_{\alpha i}. \tag{38.5}$$

该方程与约束方程(38.2)一起构成了未知量 q_i,λ_α 的完备方程组.

在上述方法中不出现反作用力,刚体的接触完全反映在约束方程中.然而,另有一种建立接触刚体运动方程的方法,反作用力明显地出现在方程中.这种方法(有时也称达朗贝尔原理)的实质是对接触刚体中的每一个写出方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{f}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}, \tag{38.6}$$

其中在作用力 $\boldsymbol{f}$ 中包括反作用力,这些反作用力起初是未知的,在求解运动方程时与刚体的运动一起被确定.这种方法对完整约束和非完整约束同样适用.

习 题

习题 1 均质球在力 $\boldsymbol{F}$ 和力矩 $\boldsymbol{K}$ 作用下,沿着平面滚动,试利用达朗贝尔原理求运动方程.

解:在正文中已经写出约束方程(38.3).在平面和球的接触点的反作用力用 $\boldsymbol{R}$ 表示,则方程(38.6)具有形式:

$$\mu\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

① 应该指出,对于圆柱的滚动,这样的约束是完整的.这时滚动中转动轴的方向在空间保持不变,所以 $\Omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ 是圆柱绕自身轴的转角 φ 对时间的全导数.这时关系式(38.3)可积,给出质心坐标与 φ 之间的关系.

$$I\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{K}-a(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{R}) \tag{2}$$

(这里考虑了 $\boldsymbol{P}=\mu\boldsymbol{V}$ 以及对于球形陀螺 $\boldsymbol{M}=I\boldsymbol{\Omega}$). 将约束方程(38.3)对时间求导,得

$$\dot{\boldsymbol{V}}=a(\dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\boldsymbol{n}).$$

代入方程(1)并与方程(2)联立消去$\dot{\boldsymbol{\Omega}}$,可得方程

$$\frac{I}{a\mu}(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R})=\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{n}-a\boldsymbol{R}+a\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{R}).$$

这个方程建立了 $\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 之间的关系. 将这个方程写成分量形式并代入 $I=(2/5)\mu a^2$(参见§32 习题 2 的 b),得

$$R_x=\frac{5}{7a}K_y-\frac{2}{7}F_x,\quad R_y=-\frac{5}{7a}K_x-\frac{2}{7}F_y,\quad R_z=-F_z$$

(这里将滚动平面取为 xy 平面). 最后,将这些表达式代入方程(1),可得仅包含给定外力和力矩的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t}=\frac{5}{7\mu}\left(F_x+\frac{K_y}{a}\right),\quad \frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t}=\frac{5}{7\mu}\left(F_y-\frac{K_x}{a}\right).$$

利用约束方程(38.3),可以将角速度的分量 Ω_x,Ω_y 用 V_x,V_y 表示,而对于 Ω_z 有方程

$$\frac{2}{5}\mu a^2\frac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}t}=K_z$$

这是方程(2)的 z 方向分量.

习题 2　重为 P 长为 l 的均质杆 BD 靠在墙上,如图 52 所示,其下端 B 用绳 AB 固定. 试求支撑点的反作用力和绳的张力.

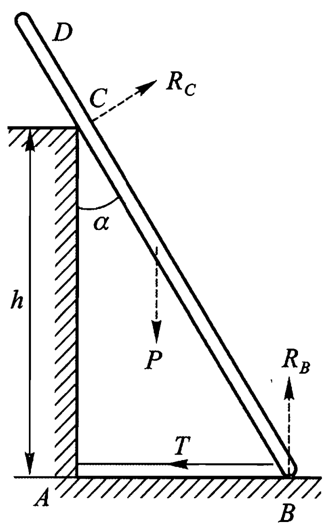


图 52

解:杆的重量可以用作用在杆中点的竖直向下的力 P 表示. 反作用力 R_B,R_C 的方向分别竖直向上和垂直于杆,绳张力 T 的方向是从 B 指向 A. 解平衡方程可得

$$R_C=\frac{Pl}{4h}\sin2\alpha,\quad R_B=P-R_C\sin\alpha,\quad T=R_C\cos\alpha.$$

习题 3　重为 P 的杆 AB 以两个端点分别靠在水平面和竖直面上,并用两条水平绳 AD 和 BC 拉着固定在适当的位置上,绳 BC 与杆 AB 位于同一个竖直面内(图 53). 试求支撑点的反作用力和绳的张力.

解:张力 T_A,T_B 的方向分别从 A 到 D 和从 B 到 C. 反作用力 R_A,R_B 分别

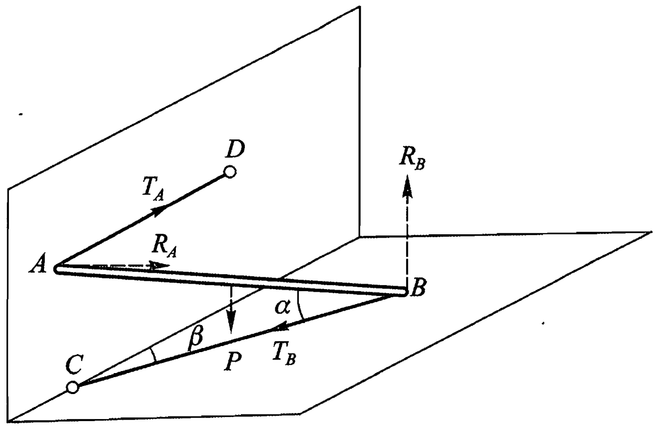


图 53

垂直相应的平面.解平衡方程得

$$R_B = P, \quad T_B = \frac{P}{2}\cot\alpha,$$

$$R_A = T_B\sin\beta, \quad T_A = T_B\cos\beta.$$

习题 4　两根长为 l 重量可以忽略的杆上面以铰链相连,下面用绳连接(图 54).杆立于一平面上,在一根杆的中点作用一个力 F.试求反作用力.

解:作用在 A 点的张力从 A 指向 B,而作用在 B 点的张力从 B 指向 A.在 A 点和 B 点的反作用力 R_A 和 R_B 垂直于支撑平面.用 R_C 表示铰链作用在 AC 杆上的反作用力,则铰链作用在 BC 杆上的反作用力为 $-R_C$.根据平衡条件,作用在 BC 杆上的力 $R_B, T, -R_C$ 的力矩之和等于零,由此可知矢量 R_C 的方向沿着 BC.再利用其它平衡条件(对两根杆分别列出),可得

$$R_A = \frac{3}{4}F, \quad R_B = \frac{F}{4},$$

$$R_C = \frac{F}{4\sin\alpha}, \quad T = \frac{1}{4}F\cot\alpha$$

其中 α 是角$\angle CAB$.

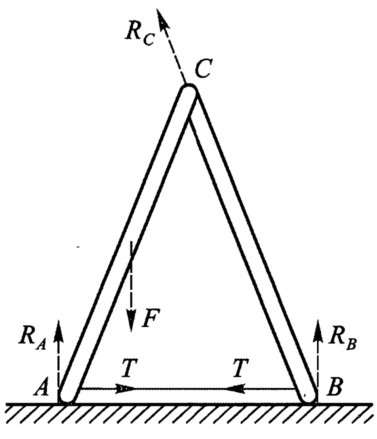


图 54

§ 39　非惯性参考系中的运动

到现在为止,我们总是相对惯性参考系研究力学系统的运动.例如,对于在外场中的单个质点,仅在惯性参考系中才有拉格朗日函数

$$L_0 = \frac{m\boldsymbol{v}_0^2}{2} - U, \tag{39.1}$$

和相应的运动方程

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}$$

(我们在本节用下标 0 表示在惯性参考系中的物理量).

现在我们研究在非惯性参考系中质点运动方程将具有的形式.解决这个问题的出发点仍是最小作用量原理,它的适用性不受参考系选择的限制,同时,拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{39.2}$$

也同样有效.但拉格朗日函数已经不是(39.1)的形式,为了求得它,需要对函数 L_0 进行必要的变换.

我们分两步进行这个变换.我们首先研究以平动速度 $\mathbf{V}(t)$相对惯性参考系 K_0 运动的参考系 K'.质点相对参考系 K_0 和 K'的速度$\boldsymbol{v}_0$ 和$\boldsymbol{v}'$之间的关系为

$$\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}'+\mathbf{V}(t). \tag{39.3}$$

将这个等式代入(39.1),可得在参考系 K'中的拉格朗日函数

$$L'=\frac{mv'^2}{2}+m\boldsymbol{v}'\cdot\mathbf{V}+\frac{m}{2}\mathbf{V}^2-U.$$

但 $V^2(t)$是时间的给定函数,可以当作某个函数对时间的全导数,所以上式中第 3 项可以略去.其次,$\boldsymbol{v}'=\mathrm{d}\boldsymbol{r}'/\mathrm{d}t$,其中 $\boldsymbol{r}'$是质点在参考系 K'中的径矢,所以有

$$m\mathbf{V}(t)\cdot\boldsymbol{v}'=m\mathbf{V}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{r}')-m\boldsymbol{r}'\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t}.$$

代入拉格朗日函数并略去对时间的全导数项,最后可得

$$L'=\frac{mv'^2}{2}-m\boldsymbol{W}(t)\cdot\boldsymbol{r}'-U, \tag{39.4}$$

其中 $\boldsymbol{W}=\mathrm{d}\mathbf{V}/\mathrm{d}t$ 是参考系 K'的平动加速度.

利用(39.4)可得拉格朗日方程

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}'}-m\boldsymbol{W}(t). \tag{39.5}$$

可见,参考系的加速平动对质点运动方程的影响,等价于施加一个均匀力场,质点在该场内受到的力等于质点的质量乘以加速度 $\boldsymbol{W}$,且方向与加速度相反.

下面我们再引进另外一个参考系 K,与 K'有共同的原点,但是以角速度 $\boldsymbol{\Omega}(t)$相对于 K'转动,于是相对惯性参考系 K_0,参考系 K 既平动又转动.

质点相对参考系 K'的速度$\boldsymbol{v}'$等于相对参考系 K 的速度$\boldsymbol{v}$ 加上随同参考系 K 转动的速度 $\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$$

(因为质点在参考系 K 和 K'中的径矢 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$相同).将这个表达式代入拉格朗日

函数(39.4),可得

$$L=\frac{mv^2}{2}+m\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})+\frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})^2-m\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{r}-U. \tag{39.6}$$

这是在任意参考系(未必是惯性系)中质点的拉格朗日函数的一般形式.我们注意到,参考系转动导致拉格朗日函数中出现一个特别的项,它对质点速度是线性的.

为了计算拉格朗日方程中的导数,我们写出全微分

$$\begin{aligned}\mathrm{d}L&=m\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}+m\mathrm{d}\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})+m\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r})+m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r})-\\&\quad m\boldsymbol{W}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=m\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}+m\mathrm{d}\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})+\\&\quad m\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})+m[(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{\Omega}]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}-m\boldsymbol{W}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.\end{aligned}$$

合并包含 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的项,可得

$$\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}}=m\boldsymbol{v}+m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}),\quad \frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}}=m(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})+m[(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{\Omega}]-m\boldsymbol{W}-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}}.$$

将这些表达式代入(39.2),可得所要求的方程

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}}-m\boldsymbol{W}+m(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{\Omega}})+2m(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})+m[\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Omega})]. \tag{39.7}$$

我们发现,因参考系转动产生的"惯性力"由 3 部分组成.力 $m(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{\Omega}})$与非匀速转动有关,而其它两个部分即使在匀速转动时也存在.力 $2m(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})$称为*科里奥利力*,与以前研究的所有(非耗散)力不同,它依赖于质点的速度.力 $m[\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Omega})]$称为*离心力*.它位于过 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 的平面上,垂直于转动轴(即 $\boldsymbol{\Omega}$ 方向),方向背离转动轴.离心力的大小等于 $m\rho\Omega^2$,其中 ρ 是质点到转动轴的距离.

我们现在考虑参考系没有平动加速度且匀速转动的特殊情况.在(39.6)和(39.7)中令 $\boldsymbol{\Omega}=\mathrm{const}$, $\boldsymbol{W}=0$,可得拉格朗日函数

$$L=\frac{mv^2}{2}+m\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})+\frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})^2-U \tag{39.8}$$

以及运动方程

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}}+2m(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})+m[\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Omega})]. \tag{39.9}$$

我们计算这种情况下质点的能量.将

$$\boldsymbol{p}=\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}}=m\boldsymbol{v}+m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) \tag{39.10}$$

代入 $E=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}-L$,可得

$$E=\frac{mv^2}{2}-\frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})^2+U. \tag{39.11}$$

应该注意，能量中没有速度的线性项．参考系的转动导致能量中出现仅依赖于质点坐标且正比于速度平方的附加项．这个附加势能 $-(m/2)(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})^2$ 称为离心势能．

质点相对匀速转动参考系的速度 $\boldsymbol{v}$ 与相对惯性参考系 K_0 的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 的关系为

$$\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}. \tag{39.12}$$

所以质点在参考系 K 中的动量 $\boldsymbol{p}$（参见(39.10)）等于质点在惯性参考系 K_0 中的动量 $\boldsymbol{p}_0=m\boldsymbol{v}_0$．同时相应的角动量 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{M}_0=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_0$ 也相等．但质点在参考系 K 和 K_0 中的能量不同．由(39.12)求出 $\boldsymbol{v}$ 代入(39.11)，可得

$$E=\frac{mv_0^2}{2}-m\boldsymbol{v}_0\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})+U=\frac{mv_0^2}{2}+U-m(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}_0)\cdot\boldsymbol{\Omega}.$$

前两项是质点在惯性参考系 K_0 中的能量 E_0．在最后一项中代入角动量，可得

$$E=E_0-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\Omega}. \tag{39.13}$$

这个公式确定了转换到匀速转动参考系时的能量的变换规律．虽然推导是对一个质点的情况进行的，但是可以直接推广到任意质点系，并得到相同的公式(39.13)．

习　题

习题 1　试求地球自转（转动角速度很小）引起自由落体对竖直方向的偏移．

解：在重力场中 $U=-m\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}$，其中 $\boldsymbol{g}$ 是重力加速度，在公式(39.9)中忽略包含 $\boldsymbol{\Omega}$ 的平方的离心力，可得运动方程

$$\dot{\boldsymbol{v}}=2\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{g}. \tag{1}$$

可用逐阶近似法求解这个方程．为此假设 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$，其中 $\boldsymbol{v}_1$ 是方程 $\dot{\boldsymbol{v}}_1=\boldsymbol{g}$ 的解，即 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{g}t+\boldsymbol{v}_0$（$\boldsymbol{v}_0$ 是初始速度）．将 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ 代入(1)并仅将 $\boldsymbol{v}_1$ 留在右端，可得 $\boldsymbol{v}_2$ 的方程

$$\dot{\boldsymbol{v}}_2=2\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{\Omega}=2t(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{\Omega})+2\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{\Omega}.$$

积分得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{h}+\boldsymbol{v}_0t+\frac{\boldsymbol{g}t^2}{2}+\frac{t^3}{3}(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{\Omega})+t^2(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{\Omega}), \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{h}$ 是质点的初始位置矢量．

取 z 轴竖直向上，x 轴沿着经线指向极点，那么

$$g_x=g_y=0,\quad g_z=-g,\quad \Omega_x=\Omega\cos\lambda,\quad \Omega_y=0,\quad \Omega_z=\Omega\sin\lambda,$$

其中 λ 是纬度（为明确起见，假设为北纬）．在(2)中令 $\boldsymbol{v}_0=0$，得

$$x=0,\quad y=-\frac{t^3}{3}g\Omega\cos\lambda.$$

代入下落时间 $t\approx\sqrt{2h/g}$,最后得

$$x=0,\quad y=-\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}g\Omega\cos\lambda$$

y 值为负表示向东偏移.

习题 2 试求以初始速度$\boldsymbol{v}_0$从地球表面向上抛出的质点的轨迹对平面的偏移.

解:设初始速度$\boldsymbol{v}_0$位于 xz 平面内,初始高度为 $h=0$. 由方程(2)(习题 1)可得侧向偏移为

$$y=-\frac{t^3}{3}g\Omega_x+t^2(\Omega_x v_{0z}-\Omega_z v_{0x}),$$

或者,代入飞行时间 $t\approx 2v_{0z}/g$ 有

$$y=\frac{4v_{0z}^2}{g^2}\left(\frac{1}{3}v_{0z}\Omega_x-v_{0x}\Omega_z\right).$$

习题 3 试确定地球转动对单摆微振动的影响(傅科摆问题).

解:忽略摆的竖直方向位移这个二阶小量,可以认为运动在水平的 xy 平面内.略去包含 Ω^2 的项,写出运动方程为

$$\ddot{x}+\omega^2x=2\Omega_z\dot{y},\quad \ddot{y}+\omega^2y=-2\Omega_z\dot{x},$$

其中 ω 为不考虑地球转动时摆的振动频率.将第二个方程乘以 i 加上第一个方程,可得关于复变量 $\xi=x+\mathrm{i}y$ 的单一方程

$$\ddot{\xi}+2\mathrm{i}\Omega_z\dot{\xi}+\omega^2\xi=0.$$

当 $\Omega_z\ll\omega$ 时这个方程的解有如下形式:

$$\xi=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_z t}(A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})$$

或者

$$x+\mathrm{i}y=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_z t}(x_0+\mathrm{i}y_0),$$

其中函数 $x_0(t)$,$y_0(t)$给出不考虑地球转动时单摆的轨迹.因此,地球转动的影响是使轨迹绕竖直方向以角速度 Ω_z 转动.

第七章

正则方程

§40 哈密顿方程[①]

利用拉格朗日函数和由它导出的拉格朗日方程来表述力学规律，其先决条件是可以用广义坐标和广义速度来描述系统的力学状态.然而，这种描述不是唯一可能的方式.利用广义坐标和广义动量来描述系统状态，具有一系列优点，特别是在研究某些力学普遍问题的时候.于是，这就产生了建立与此相应的运动方程的问题.

通过数学上著名的勒让德变换，可以从一组独立变量变换到另一组.在现在这种情况下，这个变换可概括如下.

作为坐标和速度的函数的拉格朗日函数，其全微分等于

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i.$$

---

① 读者可能会发现下表是非常有用的，该表列出了本书中所用术语与其它英语文献中常用术语之间的某些差别.

本书	其它文献
最小作用量原理	哈密顿原理
莫培督原理	最小作用量原理 莫培督原理
作用量	哈密顿主函数
简约作用量	作用量

——英译本注

因为按定义导数 $\partial L/\partial \dot{q}_i$ 是广义动量，又根据拉格朗日方程有 $\partial L/\partial q_i = \dot{p}_i$，所以上面这个表达式可以写成

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i. \tag{40.1}$$

现在将(40.1)的第二项写成

$$\sum p_i d\dot{q}_i = d\left(\sum p_i \dot{q}_i\right) - \sum \dot{q}_i dp_i,$$

将全微分 $d(\sum p_i \dot{q}_i)$ 移到等式左端并改变符号，由(40.1)可得

$$d\left(\sum p_i \dot{q}_i - L\right) = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i.$$

微分的变量是用广义坐标和广义动量表示的系统的能量(参见 §6)，称为系统的**哈密顿函数**

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \tag{40.2}$$

由其中独立变量为坐标和动量的微分等式

$$dH = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i \tag{40.3}$$

可以得出方程

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{40.4}$$

这些就是用变量 p 和 q 表示的所要求的运动方程，称为**哈密顿方程**，它们是关于 $2s$ 个未知函数 $p_i(t)$ 和 $q_i(t)$ 的 $2s$ 个一阶微分方程组，代替拉格朗日方法的 s 个二阶方程. 由于这些方程的形式简单并且对称，也称之为**正则方程**.

哈密顿函数对时间的全导数为

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i.$$

将方程(40.4)的 $\dot{q}_i$，$\dot{p}_i$ 代入，上式后两项相互抵消，因此

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{40.5}$$

特别地，如果哈密顿函数不显含时间，则 $dH/dt = 0$，即得到能量守恒定律.

除了动力学变量 q，$\dot{q}$ 或者 q，p，拉格朗日函数和哈密顿函数还包含各种参数，这些参数与力学系统自身的性质或者作用于其上的外场有关. 设 λ 是这样的参数，我们将它看作变量，则代替表达式(40.1)，有

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda,$$

而(40.3)变为

$$dH = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda.$$

由此可得拉格朗日函数和哈密顿函数对参数 λ 的偏导数之间的关系

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{\dot{q},q}, \tag{40.6}$$

导数的下标表示,在对 H 求 λ 的偏导时 p,q 是不变的,对 L 求 λ 的偏导时 $q,\dot{q}$ 是不变的.

这个结果可以表示为另一种形式.设拉格朗日函数的形式为 $L = L_0 + L'$,其中 L'是对函数 L_0 很小的修正.哈密顿函数 $H = H_0 + H'$的相应附加项与 L' 的关系为

$$(H')_{p,q} = -(L')_{\dot{q},q}. \tag{40.7}$$

应该注意到,在从(40.1)到(40.3)的变换中,我们没有写出带 $\mathrm{d}t$ 的项,即没有考虑拉格朗日函数可能显含时间的情况.这是因为在那里时间仅仅是一个参数,不参与所做的变换.类似于公式(40.6),拉格朗日函数和哈密顿函数对时间的偏导数之间的关系为

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{\dot{q},q}. \tag{40.8}$$

习　　题

习题 1　试求在笛卡儿坐标、柱坐标和球坐标下一个质点的哈密顿函数.

答案:在笛卡儿坐标 x,y,z 下

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x,y,z).$$

在柱坐标 r,φ,z 下

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) + U(r,\varphi,z).$$

在球坐标 r,θ,φ 下

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + U(r,\theta,\varphi).$$

习题 2　试求质点在匀速转动参考系中的哈密顿函数.

解:用(39.10)的动量 $\boldsymbol{p}$ 表示能量(39.11)中的速度 $\boldsymbol{v}$,有

$$H = \frac{p^2}{2m} - \boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}) + U.$$

习题 3　设有一个由质量为 M 的质点和 n 个质量为 m 的质点组成的系统,不考虑系统质心的运动,试求这个系统的哈密顿函数(参见§13 习题).

解:在§13 习题中得到的拉格朗日函数中,改变 U 前面的符号,可得能量 E.广义动量为

$$\boldsymbol{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = m\,\boldsymbol{v}_a - \frac{m^2}{\mu}\sum_a \boldsymbol{v}_a.$$

由此得

$$\sum \boldsymbol{p}_a = m\sum \boldsymbol{v}_a - \frac{nm^2}{\mu}\sum_a \boldsymbol{v}_a = \frac{mM}{\mu}\sum_a \boldsymbol{v}_a,$$

$$\boldsymbol{v}_a = \frac{\boldsymbol{p}_a}{m} + \frac{1}{M}\sum \boldsymbol{p}_a.$$

代入 E,可得

$$H = \frac{1}{2m}\sum_a \boldsymbol{p}_a^2 + \frac{1}{2M}\Big(\sum_a \boldsymbol{p}_a\Big)^2 + U.$$

§ 41 罗斯函数

在某些情况下,变换到新变量时,仅对部分而不是全部的广义速度用动量来代替是很方便的.相应的变换完全类似于§ 40 给出的变换.

为了简化公式,首先假设仅有两个广义坐标,用 q 和 ξ 表示,我们进行从 q, $\xi,\dot q,\dot\xi$ 到 $q,\xi,p,\dot\xi$ 的变换,其中 p 为相应于广义坐标 q 的广义动量.

拉格朗日函数 $L(q,\xi,\dot q,\dot\xi)$ 的微分为

$$\mathrm{d}L = \frac{\partial L}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\mathrm{d}\,\dot q + \frac{\partial L}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot\xi}\mathrm{d}\,\dot\xi = \dot p\mathrm{d}q + p\mathrm{d}\,\dot q + \frac{\partial L}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot\xi}\mathrm{d}\,\dot\xi,$$

由此可得

$$\mathrm{d}(L - p\,\dot q) = \dot p\mathrm{d}q - \dot q\mathrm{d}p + \frac{\partial L}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot\xi}\mathrm{d}\dot\xi.$$

如果定义罗斯函数为

$$R(q,p,\xi,\dot\xi) = p\,\dot q - L, \tag{41.1}$$

式中的速度 $\dot q$ 借助方程 $p=\partial L/\partial\dot q$ 用广义动量 p 表示,则罗斯函数的微分为

$$\mathrm{d}R = -\,\dot p\mathrm{d}q + \dot q\mathrm{d}p - \frac{\partial L}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi - \frac{\partial L}{\partial \dot\xi}\mathrm{d}\,\dot\xi. \tag{41.2}$$

由此可得

$$\dot q = \frac{\partial R}{\partial p}, \quad \dot p = -\frac{\partial R}{\partial q}, \tag{41.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = -\frac{\partial R}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot\xi} = -\frac{\partial R}{\partial \dot\xi}. \tag{41.4}$$

将后两个等式代入变量 ξ 的拉格朗日方程,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot\xi} = \frac{\partial R}{\partial \xi}. \tag{41.5}$$

可见,罗斯函数对于坐标 q 是哈密顿函数(方程(41.3)),对于坐标 ξ 是拉格朗日函数(方程(41.5)).

根据一般定义,系统的能量为

$$E=\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}+\dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}-L=p\dot{q}+\dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}-L.$$

将(41.1)和(41.4)代入,能量可以用罗斯函数表示为

$$E=R-\dot{\xi}\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}. \tag{41.6}$$

显然,我们得到的这些公式可以推广到有多个坐标 q 和 ξ 的情况.

应用罗斯函数可能是非常方便的,特别是存在循环坐标的时候.如果 q 是循环坐标,则它不显含在拉格朗日函数中,因而不显含于罗斯函数,所以罗斯函数仅是变量 $p,\xi,\dot{\xi}$ 的函数.而相应于循环坐标的广义动量 p 为常数(也可以从(41.3)的第二个方程得出,从这个意义上讲,方程(41.3)不能给出任何新的结果).将 p 替换为给定常值后,方程(41.5)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R(p,\xi,\dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}}=\frac{\partial R(p,\xi,\dot{\xi})}{\partial \xi}$$

成为仅包含坐标 ξ 的方程,循环坐标完全被消去.如果这些方程可以求解并得到函数 $\xi(t)$,则将其代入方程

$$\dot{q}=\frac{\partial R(p,\xi,\dot{\xi})}{\partial p}$$

的右端,可以直接积分求出函数 $q(t)$.

习 题

习题 试消去循环坐标 ψ,求在外力场 $U(\varphi,\theta)$ 中对称陀螺的罗斯函数,其中 ψ,φ,θ 是欧拉角.

解:拉格朗日函数

$$L=\frac{I_1'}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+\frac{I_3}{2}(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^2-U(\varphi,\theta)$$

(参见§35 的习题 1).罗斯函数为

$$R=p_\psi\dot{\psi}-L=\frac{p_\psi^2}{2I_3}-p_\psi\dot{\varphi}\cos\theta-\frac{I_1'}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+U(\varphi,\theta),$$

第一项是常数,可以略去.

§42 泊松括号

设 $f(p,q,t)$ 是坐标、动量和时间的某个函数.它对时间的全导数为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k\right).$$

代入由哈密顿方程(40.4)给出的$\dot{q}_k$,$\dot{p}_k$的表达式,得

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\{H,f\},\tag{42.1}$$

其中引入了记号

$$\{H,f\}=\sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right).\tag{42.2}$$

表达式(42.2)称为量 H 和 f 的泊松括号.

我们知道,如果动力学变量的某个函数当系统运动时保持不变,则称之为运动积分.由(42.1)可知,f 是运动积分($\mathrm{d}f/\mathrm{d}t=0$)的条件可以写为

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\{H,f\}=0.\tag{42.3}$$

如果运动积分不显含时间,则

$$\{H,f\}=0,\tag{42.4}$$

即运动积分 f 和哈密顿函数的泊松括号必等于零.

对于任意一对变量 f,g,泊松括号可以类似于(42.2)定义为

$$\{f,g\}=\sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}-\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right).\tag{42.5}$$

由定义容易推出泊松括号的如下性质.

如果两个函数对调,则泊松括号改变符号;如果一个函数是常数(c),则泊松括号等于零:

$$\{f,g\}=-\{g,f\},\tag{42.6}$$

$$\{f,c\}=0.\tag{42.7}$$

其次,还有

$$\{f_1+f_2,g\}=\{f_1,g\}+\{f_2,g\},\tag{42.8}$$

$$\{f_1f_2,g\}=f_1\{f_2,g\}+f_2\{f_1,g\}.\tag{42.9}$$

将(42.5)对时间求偏导数有

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}.\tag{42.10}$$

如果函数 f 或 g 之一是广义坐标或者广义动量,则泊松括号简化为偏导数:

$$\{f,q_k\}=\frac{\partial f}{\partial p_k},\tag{42.11}$$

$$\{f,p_k\}=-\frac{\partial f}{\partial q_k}.\tag{42.12}$$

例如，在(42.5)中令 $g = q_k$，就可以得到公式(42.11)，由于

$$\frac{\partial q_k}{\partial q_l} = \delta_{kl}, \quad \frac{\partial q_k}{\partial p_l} = 0,$$

这时求和只剩下一项. 特别地，在(42.11)和(42.12)中令函数 f 等于 q_i 和 p_i，可得

$$\{q_i, q_k\} = 0, \quad \{p_i, p_k\} = 0, \quad \{p_i, q_k\} = \delta_{ik}. \tag{42.13}$$

在3个函数组成的泊松括号之间，存在下面关系式

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0, \tag{42.14}$$

我们称之为*雅可比恒等式*.

为了证明这个恒等式，我们首先注意到下面的结果. 根据定义(42.5)，泊松括号 $\{f, g\}$ 是 f 和 g 的一阶导数的双线性齐次函数. 所以，例如，括号 $\{h, \{f, g\}\}$ 是 f 和 g 的二阶导数的线性齐次函数. 因此等式(42.14)的整个左端是所有3个函数 f, g, h 的二阶导数的线性齐次函数. 我们将含有 f 的二阶导数的项放在一起. 第一个括号不含这样的项，因为它只涉及 f 的一阶导数. 对第2和第3个括号之和，利用由

$$D_1(\varphi) = \{g, \varphi\}, \quad D_2(\varphi) = \{h, \varphi\},$$

定义的线性微分算符 D_1 和 D_2 可以将其以符号形式写为

$$\begin{aligned}\{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} &= \{g, \{h, f\}\} - \{h, \{g, f\}\} \\ &= D_1(D_2(f)) - D_2(D_1(f)) \\ &= (D_1 D_2 - D_2 D_1) f.\end{aligned}$$

容易看出，这个线性微分算符的组合不可能包含 f 的二阶导数. 事实上，线性微分算符的一般形式为

$$D_1 = \sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad D_2 = \sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

其中 ξ_k, η_k 是变量 $x_1, x_2, \cdots$ 的任意函数. 于是

$$D_1 D_2 = \sum_{k,l} \xi_k \eta_l \frac{\partial^2}{\partial x_k x_l} + \sum_{k,l} \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$D_2 D_1 = \sum_{k,l} \eta_k \xi_l \frac{\partial^2}{\partial x_k x_l} + \sum_{k,l} \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

它们之差

$$D_1 D_2 - D_2 D_1 = \sum_{k,l} \left(\xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_l}$$

是仅包含一阶导数的算符. 于是，在(42.14)的左端，所有包含 f 的二阶导数的项相互抵消，对于 g 和 h 当然有相同的结论，于是整个表达式恒等于零.

泊松括号的一个重要性质在于，如果 f 和 g 是两个运动积分，则它们构成的

泊松括号也是运动积分

$$\{f,g\} = \text{const} \tag{42.15}$$

这就是泊松定理.

如果 f 和 g 不显含时间,这个定理的证明非常简单.在雅可比恒等式中令 $h = H$,得

$$\{f,\{g,H\}\} + \{g,\{H,f\}\} + \{H,\{f,g\}\} = 0.$$

由此可见,如果有 $\{H,g\} = 0$ 和 $\{H,f\} = 0$,则 $\{H,\{f,g\}\} = 0$,于是结论得证.

如果运动积分 f 和 g 显含时间,则依据(42.1)可以写出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{f,g\} = \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} + \{H,\{f,g\}\}.$$

利用公式(42.10),借助雅可比恒等式将括号 $\{H,\{f,g\}\}$ 用另外两个括号代替,可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{f,g\} &= \left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\} + \left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\} - \{f,\{g,H\}\} - \{g,\{H,f\}\} \\ &= \left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \{H,f\},g\right\} + \left\{f,\frac{\partial g}{\partial t} + \{H,g\}\right\}\end{aligned}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{f,g\} = \left\{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},g\right\} + \left\{f,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right\}, \tag{42.16}$$

由此显然可以证明一般情况下的泊松定理.

当然,应用泊松定理,我们不是总能得到新的运动积分,因为仅有 $2s-1$ 个运动积分(其中 s 是自由度).在某些情况下,我们可能得到平凡的结果,泊松括号为常数.在另外一些情况下,新得到的运动积分只不过是原来的运动积分 f 和 g 的函数.然而,如果不是上述两种情况,则泊松括号给出新的运动积分.

习 题

习题 1 试求质点的动量 $\boldsymbol{p}$ 和角动量 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ 的笛卡儿坐标分量组成的泊松括号.

解:根据公式(42.12)得

$$\{M_x,p_y\} = -\frac{\partial M_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(yp_z - zp_y) = -p_z$$

和类似的两个公式

$$\{M_x,p_x\} = 0, \quad \{M_x,p_z\} = p_y.$$

其它的泊松括号可以通过下标 x,y,z 的循环置换得到.

习题 2 试求角动量 $\boldsymbol{M}$ 的分量组成的泊松括号.

解:直接由公式(42.5)计算得

$$\{M_x, M_y\} = -M_z, \quad \{M_y, M_z\} = -M_x, \quad \{M_z, M_x\} = -M_y.$$

因为不同质点的坐标和动量是相互独立的变量，所以在习题 1 和 2 中所得的公式对于任意质点系的总动量和总角动量也成立.

习题 3　试证

$$\{\varphi, M_z\} = 0,$$

其中 φ 是质点坐标和动量的任意标量函数.

证：标量函数 φ 只能以 $r^2, p^2, \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{p}$ 的组合形式依赖于矢量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 的分量. 所以

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{r}} = 2\frac{\partial \varphi}{\partial (r^2)}\boldsymbol{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r})}\boldsymbol{p}$$

对 $\partial\varphi/\partial\boldsymbol{p}$ 也类似. 利用这些偏微分公式，按公式(42.5) 直接计算即可得要证的结论.

习题 4　试证

$$\{\boldsymbol{f}, M_z\} = \boldsymbol{f} \times \boldsymbol{n},$$

其中 $\boldsymbol{f}$ 是质点坐标和动量的矢量函数，而 $\boldsymbol{n}$ 是沿着 z 方向的单位矢量.

证：任意矢量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ 可以写成

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{r}\varphi_1 + \boldsymbol{p}\varphi_2 + (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})\varphi_3,$$

其中 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 是标量函数. 利用公式(42.9)、(42.11)、(42.12) 和习题 3 给出的公式，直接计算即可得要证的结论.

§ 43　作为坐标函数的作用量

在表述最小作用量原理时，我们研究过沿着两个给定位置 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$ 之间轨道的积分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t, \tag{43.1}$$

其中 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$ 是在给定时刻 t_1 和 t_2 系统占据的位置. 在对作用量变分时，我们比较有相同值 $q(t_1)$ 和 $q(t_2)$ 的临近轨道的这个积分值. 这些轨迹中只有一条对应真实运动，这就是积分 S 取极小值的轨道.

下面我们从另一个角度考虑作用量这个概念. 我们将 S 看作表征沿着真实轨迹运动的量，并比较有相同初始位置 $q(t_1) = q^{(1)}$ 但 t_2 时刻通过不同位置的那些轨迹的 S 值. 换句话说，我们将真实轨道的作用量积分看作积分上限中那些坐标的函数.

从一条轨迹变到相邻的其它轨迹时，作用量产生的改变量由下面表达式给出(当有一个自由度时)：

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \mathrm{d}t.$$

因为实际运动轨道满足拉格朗日方程,故这个式子中积分等于零.在第一项假设在积分下限 $\delta q(t_1) = 0$, 而将 $\delta q(t_2)$ 简记为 δq.将 $\partial L/\partial \dot{q}$ 替换为 p,最后可得:$\delta S = p\delta q$ 或者在任意自由度的一般情况下写成

$$\delta S = \sum_i p_i \delta q_i. \tag{43.2}$$

由此式可知,作用量对坐标的偏导数等于相应的动量

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \tag{43.3}$$

类似地,当我们考虑在给定时刻 t_1 从给定位置 $q^{(1)}$ 出发,在不同时刻 $t_2 = t$ 终结于给定位置 $q^{(2)}$ 的轨迹时,可以将作用量看作时间的显函数.在这个意义下偏导数 $\partial S/\partial t$ 可以通过相应积分的适当变分求得.但是,借助公式(43.3),用下面的方法会更简单.

根据作用量的定义,它沿着轨道对时间的全导数等于

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = L. \tag{43.4}$$

从另一方面,在上述意义下将 S 看作坐标和时间的函数,利用公式(43.3),有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i.$$

比较两个表达式,可得

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i$$

或者

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - H. \tag{43.5}$$

公式(43.3) 和(43.5) 可以一起写成作用量的全微分的表达式

$$\mathrm{d}S = \sum_i p_i \mathrm{d}q_i - H\mathrm{d}t, \tag{43.6}$$

其中作用量看作(43.1) 积分上限中坐标和时间的函数.下面假设不仅运动的终点而且初始点的坐标和时间都变化.显然,S 相应的变化将由表达式(43.6) 在轨道两端点的差值给出,即

$$\mathrm{d}S = \sum_i p_i^{(2)} \mathrm{d}q_i^{(2)} - H^{(2)} \mathrm{d}t^{(2)} - \sum_i p_i^{(1)} \mathrm{d}q_i^{(1)} + H^{(1)} \mathrm{d}t^{(1)}. \tag{43.7}$$

这个关系式表明,在运动过程中无论外部对系统的作用如何,运动的末态都不可能是初态的任意函数,只有(43.7) 右端表达式是全微分的那些运动才是可能的.于是,存在与拉格朗日函数任何具体形式无关的最小作用量原理,给可能运动

的范围附加了一定的限制. 特别是,对于从空间给定点发出的粒子束,可以导出许多不依赖于外场的一般性质. 对于这些性质的研究是几何光学学科中的一个组成部分. ①

应该指出,如果将坐标和动量看作独立变分的变量,并依据(43.6) 将作用量写成积分形式

$$S = \int\Big(\sum_i p_i \mathrm{d}q_i - H\mathrm{d}t\Big), \tag{43.8}$$

则可以由最小作用量原理从形式上推导出哈密顿方程. 为简单起见,我们还是假设只有一个坐标(和一个动量),写出作用量的变分

$$\delta S = \int\left(\delta p\mathrm{d}q + p\mathrm{d}\delta q - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q\mathrm{d}t - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p\mathrm{d}t\right).$$

对第二项分部积分给出

$$\delta S = \int\delta p\left(\mathrm{d}q - \frac{\partial H}{\partial p}\mathrm{d}t\right) + p\delta q\Big| - \int\delta q\left(\mathrm{d}p + \frac{\partial H}{\partial q}\mathrm{d}t\right).$$

在积分限上应该令 $\delta q = 0$,这样被积分出来的项就消去了. 只有在被积函数分别等于零的条件下,剩下的表达式才能对任意独立的 δq 和 δp 都等于零. 于是有

$$\mathrm{d}q = \frac{\partial H}{\partial p}\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}p = -\frac{\partial H}{\partial q}\mathrm{d}t,$$

除以 $\mathrm{d}t$ 后可得哈密顿方程.

§ 44 莫培督原理

力学系统的运动完全由最小作用量原理确定:通过求解由该原理导出的运动方程,可以得到轨迹的形式以及在轨道上位置与时间的函数关系.

如果我们限定仅确定运动轨迹而不涉及时间的问题,则可以为此建立最小作用量原理的更简单形式.

假设拉格朗日函数不显含时间,因而哈密顿函数不显含时间,由此系统的能量守恒:

$$H(p, q) = E = \text{const}.$$

根据最小作用量原理,对于给定的初态和末态的坐标和时间(记为 t_0, t),作用量变分等于零. 然而,如果坐标的初值和终值保持不变,允许末状时间 t 变分,则有(参见(43.7))

$$\delta S = -H\delta t. \tag{44.1}$$

我们不比较系统所有的虚运动,而只是比较满足能量守恒定律的那些运动. 对于这样的轨道,我们可以在(44.1) 中将 H 代替为常数 E,这给出

① 参见本教程《场论》,第七章.

$$\delta S + E\delta t = 0. \tag{44.2}$$

写出(43.8)形式的作用量并将 H 代替为常数 E,有

$$S = \int \sum_i p_i \mathrm{d}q_i - E(t - t_0). \tag{44.3}$$

这个表示式中的第一项

$$S_0 = \int \sum_i p_i \mathrm{d}q_i \tag{44.4}$$

有时也称为简约作用量.

将(44.3)代入(44.2),得

$$\delta S_0 = 0. \tag{44.5}$$

可见,相对于所有满足能量守恒定律且在任意时刻通过终点的轨道,简约作用量有极小值.为了利用这个变分原理,必须预先用坐标 q 及其微分 $\mathrm{d}q$ 表示出动量和(44.4)所有被积函数.为此需要利用动量的定义式

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L\left(q, \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right) \tag{44.6}$$

以及能量守恒方程

$$E\left(q, \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right) = E. \tag{44.7}$$

利用公式(44.7),用坐标 q 及其微分 $\mathrm{d}q$ 表示 $\mathrm{d}t$ 并代入公式(44.6),那么我们就得用坐标 q 及其微分 $\mathrm{d}q$ 表示的动量,并且以能量 E 作为参数.这样得到的变分原理可以确定系统的轨道,这个原理通常称为莫培督原理,尽管它的精确表述由欧拉和拉格朗日给出.

当拉格朗日函数为常用形式(5.5),即动能与势能之差

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q),$$

时,我们可以显式地进行上述各量的计算.这时动量为

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k a_{ik}(q)\, \dot{q}_k,$$

而能量为

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_k + U(q).$$

由上式可得

$$\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\sum a_{ik} \mathrm{d}q_i \mathrm{d}q_k}{2(E-U)}}, \tag{44.8}$$

将这个表达式代入

$$\sum_i p_i \mathrm{d}q_i = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}q_i,$$

可得简约作用量为

$$S_0 = \int \sqrt{2(E - U)\sum_{i,k} a_{ik} \mathrm{d}q_i \mathrm{d}q_k}. \tag{44.9}$$

特别地,对于一个质点,动能为

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$

其中 m 为质点的质量,而 $\mathrm{d}l$ 是轨道的微元,确定轨道的变分原理为

$$\delta\int \sqrt{2m(E - U)}\mathrm{d}l = 0, \tag{44.10}$$

其中的积分是空间中两个给定点之间的积分.这个形式由雅可比提出.

对于质点的自由运动,$U = 0$,(44.10) 给出平凡结果

$$\delta\int \mathrm{d}l = 0,$$

即质点沿着两给定点之间的最短路径,即直线运动.

我们再回到作用量表达式(44.3),这次对参数 E 变分:

$$\delta S = \frac{\partial S_0}{\partial E}\delta E - (t - t_0)\delta E - E\delta t.$$

将此式代入(44.2),得

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = t - t_0. \tag{44.11}$$

对于形式为(44.9) 的简约作用量,这个等式变为

$$\int \sqrt{\frac{\sum a_{ik}\mathrm{d}q_i \mathrm{d}q_k}{2(E - U)}} = t - t_0. \tag{44.12}$$

这正是方程(44.8) 的积分.它与轨道方程一起完全确定系统的运动.

习 题

习题 试由变分原理(44.10)推导出轨道的微分方程.

解:进行变分有

$$\delta\int \sqrt{E - U}\mathrm{d}l = -\int\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \frac{\delta \boldsymbol{r}}{2\sqrt{E - U}}\mathrm{d}l - \sqrt{E - U}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}l} \cdot \mathrm{d}\delta\boldsymbol{r}\right).$$

在第二项中考虑到 $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}^2$,因此 $\mathrm{d}l\mathrm{d}\delta l = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\delta\boldsymbol{r}$.将这一项分部积分然后令被积函数中 $\delta\boldsymbol{r}$ 的系数等于零,得轨道的微分方程

$$2\sqrt{E - U}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\sqrt{E - U}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}l}\right) = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}.$$

计算方程左端的导数并引入力 $\boldsymbol{F} = -\partial U/\partial \boldsymbol{r}$,可将方程写成

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t})\boldsymbol{t}}{2(E - U)},$$

其中 $\boldsymbol{t}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}l$ 是轨道切向单位矢量，而差 $\boldsymbol{F}-(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t})\boldsymbol{t}$ 是力在轨道法线方向的分量 $\boldsymbol{F}_n$. 由微分几何可知，导数 $\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}l$ 等于 $\boldsymbol{n}/R$，其中 R 为轨道的曲率半径，而 $\boldsymbol{n}$ 是轨道主法线方向单位矢量. 将 $E-U$ 替换为 $mv^2/2$，得

$$\boldsymbol{n}\frac{mv^2}{R}=\boldsymbol{F}_n,$$

这与所熟悉的曲线运动中的法向加速度公式相符.

§ 45 正则变换

广义坐标 q 的选择不受任何条件的限制，它们可以是任意单值确定系统在空间中位置的 s 个量. 拉格朗日方程(2.6)的形式不依赖于这种选择，在这个意义下，可以说拉格朗日方程对于从广义坐标 $q_1,q_2,\cdots$ 到任何另外的独立变量 $Q_1,Q_2,\cdots$ 的变换具有不变性. 新坐标 Q 是老坐标 q 的函数，并且可以假定它们显含时间，即有形式为

$$Q_i=Q_i(q,t) \tag{45.1}$$

的变换(有时称为点变换).

由于拉格朗日方程在变换(45.1)下不变，所以哈密顿方程(40.4)也保持不变. 然而，哈密顿方程实际上允许更广范围的变换. 自然这是因为在哈密顿方法中动量 p 与坐标 q 都是平等的独立变量. 所以，变换可以推广到包括从 $2s$ 个独立变量 p 和 q 到新变量 P 和 Q 的变换，即

$$Q_i=Q_i(p,q,t),\quad P_i=P_i(p,q,t). \tag{45.2}$$

对这种可能变换的类型的扩大是力学的哈密顿方法的重要优点之一.

然而，并不是在形如(45.2)的所有变换下，运动方程均保持它们的正则形式. 下面我们研究变换满足什么条件，才可以使用变量 P,Q 表示的运动方程具有如下形式：

$$\dot{Q}_i=\frac{\partial H'}{\partial P_i},\quad \dot{P}_i=-\frac{\partial H'}{\partial Q_i}, \tag{45.3}$$

其中 $H'(P,Q)$是某个哈密顿函数. 在这些变换中有一类特别重要的变换，称之为正则变换.

可用如下步骤得到正则变换的公式. 在 § 43 结尾处已经证明，哈密顿方程可以由下面形式的最小作用量原理推得：

$$\delta\int\Big(\sum_i p_i\mathrm{d}q_i-H\mathrm{d}t\Big)=0 \tag{45.4}$$

其中对所有坐标和动量独立地进行变分. 如果新变量 P 和 Q 也满足哈密顿方程，则下面的最小作用量原理也必须成立：

$$\delta\int\Big(\sum_i P_i\mathrm{d}Q_i-H'\mathrm{d}t\Big)=0. \tag{45.5}$$

如果(45.4)和(45.5)的被积函数仅相差关于坐标、动量和时间的某个函数 F 的全微分,则两种形式当然是等价的,这时两个积分之差为在变分时不起作用的常数(即 F 在两个积分限的值之差).因此,我们将取关系

$$\sum_i p_i \mathrm{d}q_i - H\mathrm{d}t = \sum_i P_i \mathrm{d}Q_i - H'\mathrm{d}t + \mathrm{d}F.$$

满足这个条件的变换称为正则变换[①].每一个正则变换均由称之为变换的母函数这个特定函数 F 来表征.

将所得关系式写成

$$\mathrm{d}F = \sum_i p_i \mathrm{d}q_i - \sum_i P_i \mathrm{d}Q_i + (H' - H)\mathrm{d}t, \tag{45.6}$$

可以看出,

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{45.7}$$

这里假设母函数是新、老坐标(和时间)的给定函数:$F = F(q, Q, t)$.当函数 F 已知时,公式(45.7)给出了老变量(p, q)和新变量(P, Q)的关系,同时还给出新的哈密顿函数.

不用变量 q, Q 表示母函数,而是用老坐标 q 和新动量 P 表示母函数,可能会更方便.为了推导这种情况下的正则变换公式,需要在关系式(45.6)中进行合适的勒让德变换,将关系式重写为

$$\mathrm{d}\left(F + \sum_i P_i Q_i\right) = \sum_i p_i \mathrm{d}q_i + \sum_i Q_i \mathrm{d}P_i + (H' - H)\mathrm{d}t.$$

等式左端微分号后面的表达式是用变量 q, P 表示的,是新的母函数.用 $\Phi(q, P, t)$表示这个母函数,于是有[②]

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \tag{45.8}$$

类似地,可以得到由依赖于变量 p, Q 或者 p, P 的母函数生成的正则变换公式.

应该指出,新老哈密顿函数之间的关系总具有相同的形式,即母函数对时间的偏导数给出它们的差 $H' - H$.特别地,如果母函数不显含时间,则 $H' = H$,即为得到新的哈密顿函数,只需要将用新变量 P, Q 表示的 p, q 替换 H 中的 p, q.

正则变换的广泛性,在很大程度上使哈密顿方法中广义坐标和广义动量的

---

① 除了正则变换,(45.4)和(45.5)的被积函数相差常数因子的变换也保持运动方程的正则形式.例如下面形式的变换:$P_i = ap_i, Q_i = q_i, H' = aH$,其中 a 为任意常数.

② 应该指出,由母函数

$$\Phi = \sum_i f_i(q, t) P_i$$

(f_i 为任意函数)得到的变换,使新坐标仅由老坐标(不是动量)表示:$Q_i = f_i(q, t)$.这是点变换,自然是正则变换的特殊情况.

概念丧失其原始含义.由于变换(45.2)将变量 P,Q 中每一个都同坐标 q 和动量 p 联系在一起,所以变量 Q 不再是纯粹的空间坐标. Q 和 P 两者之间的区别本质上仅在于名称的不同.这是很明显的,例如,变换 $Q_i=p_i,P_i=-q_i$ ① 很明显并不影响方程的正则形式,只是简单地将坐标和动量互换.

考虑到命名的任意性,变量 p 和 q 在哈密顿方法中经常被简称为正则共轭变量.

联系这些正则共轭变量的条件可以用泊松括号表示.为此我们先证明一个关于泊松括号相对正则变换不变的普遍定理.

设 $\{f,g\}_{p,q}$ 是 f 和 g 的泊松括号,其中微分运算是相对变量 p,q 的,而 $\{f,g\}_{P,Q}$ 是相对于变量 P,Q 微分的泊松括号.于是有

$$\{f,g\}_{p,q}=\{f,g\}_{P,Q}. \tag{45.9}$$

这个关系式的正确性可以利用正则变换公式直接计算得到.但是,也可以通过下面的论证而不必计算来证实.

首先可以看出,在正则变换(45.7)或者(45.8)中,时间以参数形式出现.因此,如果我们证明定理(45.9)对于不显含时间的量成立,则对一般情况也成立.现在我们纯粹在形式上将 g 看作是某个假想系统的哈密顿函数.那么根据(42.1), $\{f,g\}_{p,q}=-\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$.但是导数 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ 只可能依赖于假想系统的运动性质,而与变量的特定选择无关.因此,在从一组正则变量变换到另一组正则变量时,泊松括号 $\{f,g\}$ 不会改变.

由公式(42.13)和定理(45.9)可得

$$\{Q_i,Q_k\}_{p,q}=0,\quad \{P_i,P_k\}_{p,q}=0,\quad \{P_i,Q_k\}_{p,q}=\delta_{ik}. \tag{45.10}$$

这些是用泊松括号写出的变换 $p,q\to P,Q$ 为正则变换时新变量必须满足的条件.

值得指出的是,在运动中变量 p,q 的变化本身也可以看作一系列的正则变换.这个结论的含义如下.设 q_t,p_t 是正则变量在 t 时刻的值,而 $q_{t+\tau},p_{t+\tau}$ 是正则变量在另一个时刻 $t+\tau$ 的值.后者是前者(以及作为参量的时间间隔 τ)的某种函数:

$$q_{t+\tau}=q(q_t,p_t,t,\tau),\quad p_{t+\tau}=p(q_t,p_t,t,\tau).$$

如果将这些公式看作从变量 q_t,p_t 到变量 $q_{t+\tau},p_{t+\tau}$ 的变换,则这是正则变换.从作用量 $S(q_{t+\tau},q_t,t,\tau)$ 的微分表示式

$$\mathrm{d}S=\sum(p_{t+\tau}\mathrm{d}q_{t+\tau}-p_t\mathrm{d}q_t)-(H_{t+\tau}-H_t)\mathrm{d}t$$

(见(43.7))可以看出这是显然的,其中作用量 $S(q_{t+\tau},q_t,t,\tau)$ 是沿着对给定的

① 这个变换相应的母函数为 $F=\sum q_iQ_i$.

τ 在时间 t 和 $t+\tau$ 过点 q_t 和 $q_{t+\tau}$ 的真实轨道所取的泛函. 比较这个公式和(45.6)可知, $-S$ 是变换的母函数.

§46　刘维尔定理

为了给出力学现象的几何解释,经常用到相空间的概念,相空间是以所涉及的力学系统的 s 个广义坐标和 s 个广义动量为坐标轴的 $2s$ 维空间. 相空间的每个点对应于系统的一个确定状态. 当系统运动时,表示系统状态的相点在相空间中画出的曲线称为相轨道. 微分的乘积

$$\mathrm{d}\Gamma=\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_s\mathrm{d}p_1\cdots\mathrm{d}p_s$$

可以看作相空间的"体积元". 下面我们研究对相空间某个区域的积分 $\int\mathrm{d}\Gamma$, 它表示这个区域的体积. 我们来证明,这个积分值对正则变换具有不变性:如果从变量 p,q 到变量 P,Q 进行正则变换,则 p,q 空间和 P,Q 空间相应区域的体积相等,即

$$\int\cdots\int\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_s\mathrm{d}p_1\cdots\mathrm{d}p_s=\int\cdots\int\mathrm{d}Q_1\cdots\mathrm{d}Q_s\mathrm{d}P_1\cdots\mathrm{d}P_s. \tag{46.1}$$

众所周知,多重积分的变量变换的公式为

$$\int\cdots\int\mathrm{d}Q_1\cdots\mathrm{d}Q_s\mathrm{d}P_1\cdots\mathrm{d}P_s=\int\cdots\int D\mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_s\mathrm{d}p_1\cdots\mathrm{d}p_s,$$

其中

$$D=\frac{\partial(Q_1,\cdots,Q_s,P_1,\cdots,P_s)}{\partial(q_1,\cdots,q_s,p_1,\cdots,p_s)} \tag{46.2}$$

是变换的雅可比行列式. 所以证明定理(46.1)归结为证明任何正则变换的雅可比行列式都等于1,即

$$D=1. \tag{46.3}$$

利用雅可比行列式的一个熟知的性质,即在某种意义下可以将雅可比行列式看作分数."分子和分母除以" $\partial(q_1,\cdots,q_s,P_1,\cdots,P_s)$, 得

$$D=\frac{\partial(Q_1,\cdots,Q_s,P_1,\cdots,P_s)}{\partial(q_1,\cdots,q_s,P_1,\cdots,P_s)}\Bigg/\frac{\partial(q_1,\cdots,q_s,p_1,\cdots,p_s)}{\partial(q_1,\cdots,q_s,P_1,\cdots,P_s)}. \tag{46.4}$$

根据雅可比行列式的另一个性质,如果"分子"和"分母"出现相同的量,则可以化为变量较少的雅可比行列式,并且在计算微分时这些相同量被视为常数. 所以

$$D=\left\{\frac{\partial(Q_1,\cdots,Q_s)}{\partial(q_1,\cdots,q_s)}\right\}_{P=\mathrm{const}}\Bigg/\left\{\frac{\partial(p_1,\cdots,p_s)}{\partial(P_1,\cdots,P_s)}\right\}_{q=\mathrm{const}}. \tag{46.5}$$

我们研究此式分子中的雅可比行列式. 根据定义,这是 s 阶行列式,其第 i 行和第 k 列的元素为 $\partial Q_i/\partial q_k$. 利用公式(45.8)中的母函数 $\Phi(q,P)$ 进行正则变换,得

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_k \partial P_i}.$$

同样可以求出表达式(46.5)的分母中行列式的第 i 行和第 k 列的元素为

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i \partial P_k}.$$

这就是说,这两个行列式的差别仅仅是将行和列互换.所以它们相等,(46.5)等于1,定理得证.

现在我们想象在相空间中有一个小区域,其中的每个点按照力学系统的运动方程随时间运动.因此这个区域也整体地运动.但是,这个区域的体积保持不变,即

$$\int \mathrm{d}\Gamma = \text{const}. \tag{46.6}$$

这个结论称为*刘维尔定理*,可直接由正则变换下相体积的不变性,以及在运动中 p 和 q 的变化可以看作正则变换(在§45末尾已经指出)得到.

完全类似地可以证明下面积分的不变性:

$$\iint \sum_i \mathrm{d}q_i \mathrm{d}p_i,$$

$$\iiiint \sum_{i\neq k} \mathrm{d}q_i \mathrm{d}p_i \mathrm{d}q_k \mathrm{d}p_k,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

其中积分是对相空间的二维流形、四维流形等等进行的.

§ 47　哈密顿 - 雅可比方程

在§43中已经引入了作为坐标和时间的函数的作用量.已经证明,这个函数 $S(q,t)$ 对时间的偏导数与哈密顿函数的关系为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H(q,p,t)=0,$$

而它对坐标的偏导数就是广义动量.在哈密顿函数中将广义动量 p 用导数 $\partial S/\partial q$ 代替,可得函数 $S(q,t)$ 应该满足的方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_1,\cdots,q_s;\frac{\partial S}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_s};t\right)=0. \tag{47.1}$$

这是一阶偏微分方程,称为*哈密顿 - 雅可比方程*.

像拉格朗日方程和正则方程一样,哈密顿 - 雅可比方程也是积分求解运动方程的一般方法的基础.

在介绍这个方法之前,我们先说明一下,任何一阶偏微分方程都有依赖于任意函数的解,这个解称为方程的通积分.然而,在力学应用中更重要的不是哈密顿 - 雅可比方程的通积分,而是*全积分*,它是偏微分方程的解,包含的独立任意

常数的数目与独立变量的数目相等.

在哈密顿－雅可比方程中独立变量是坐标和时间.所以对于自由度为 s 的系统,哈密顿－雅可比方程的全积分应该包括 $s+1$ 个任意常数.又因为函数 S 仅以其导数的形式出现在哈密顿－雅可比方程中,所以任意常数中有一个是以相加方式出现的,即哈密顿－雅可比方程的全积分形式为

$$S=f(t,q_1,\cdots,q_s;\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+A, \tag{47.2}$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 和 A 是任意常数①.

下面我们研究哈密顿－雅可比方程的全积分与我们感兴趣的运动方程的解之间的关系.为此我们进行从变量 q,p 到新变量的正则变换,并且以 $f(t,q,\alpha)$ 为母函数,而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 作为新的动量.新的坐标用 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 表示.因为母函数依赖于老坐标和新动量,我们利用公式(45.8):

$$p_i=\frac{\partial f}{\partial q_i},\quad \beta_i=\frac{\partial f}{\partial \alpha_i},\quad H'=H+\frac{\partial f}{\partial t}.$$

由于函数 f 满足哈密顿－雅可比方程,我们可以看出,新哈密顿函数应该等于零:

$$H'=H+\frac{\partial f}{\partial t}=H+\frac{\partial S}{\partial t}=0.$$

所以对新变量的正则方程为 $\dot{\alpha}_i=0,\dot{\beta}_i=0$,由此可得

$$\alpha_i=\text{const},\quad \beta_i=\text{const}. \tag{47.3}$$

另一方面,利用 s 个方程

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}=\beta_i$$

可以将 s 个坐标 q 用时间和 $2s$ 个常数 α,β 表示出来,这就给出了运动方程的通积分.

---

① 虽然这里我们并不需要哈密顿－雅可比方程的通积分,但是我们还是应该指出,如果已知全积分,则可以求出通积分.为此,我们认为 A 是其它常数的任意函数:

$$S=f(t,q_1,\cdots,q_s;\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+A(\alpha_1,\cdots,\alpha_s).$$

用 s 个条件

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}=0,$$

给出的坐标和时间的函数代替 α_i,得到依赖于任意函数 $A(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$的形式的通积分.事实上,对于按这种方式给定的函数 S,有

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha+\sum_k\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_k}\right)_q\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i}=\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha.$$

根据 $S(t,q;\alpha)$是哈密顿－雅可比方程的全积分的假定,$(\partial S/\partial q_i)_\alpha$ 满足哈密顿－雅可比方程.所以 $\partial S/\partial q_i$ 也满足哈密顿－雅可比方程.

于是用哈密顿－雅可比方法求解力学系统的运动问题按如下步骤进行.

根据哈密顿函数写出哈密顿－雅可比方程,并求该方程的全积分(47.2).将它对常数 α 求偏导数并使之等于新的常数 β,可得 s 个代数方程

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}=\beta_i. \tag{47.4}$$

求解这些代数方程得到 q 作为时间和 $2s$ 个任意常数的函数.然后由方程 $p_i=\partial S/\partial q_i$ 可以求得动量对时间的依赖关系.

如果哈密顿－雅可比方程有非全积分,它依赖于少于 s 个任意常数,则尽管不能由它求出运动方程的通积分,但是可以用来简化求通积分的过程.例如,如果已知包含一个任意常数 α 的函数 S,则关系

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha}=\text{const}$$

给出一个关于 $q_1,\cdots,q_s$ 和 t 的方程.

如果函数 H 不显含时间,即如果系统是保守的,哈密顿－雅可比方程有更简单的形式.这时作用量对时间的依赖关系归结为加上 $-Et$:

$$S=S_0(q)-Et \tag{47.5}$$

(参见§44),代入(47.1)可得简约作用量 $S_0(q)$ 的如下形式的哈密顿－雅可比方程

$$H\left(q_1,\cdots,q_s;\frac{\partial S_0}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right)=E. \tag{47.6}$$

§ 48 分离变量

在一些重要的情况下,哈密顿－雅可比方程的全积分可以通过分离变量的方法求得,该方法的实质如下.

假设某一个坐标,例如用 q_1 表示,与相应的导数 $\partial S/\partial q_1$,在哈密顿－雅可比方程中仅以某种组合 $\varphi(q_1,\partial S/\partial q_1)$ 的方式出现,该组合中不包含其它坐标,时间及其导数,即方程的形式为

$$\Phi\left\{q_i,t,\frac{\partial S}{\partial q_i},\frac{\partial S}{\partial t},\varphi\left(q_1,\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right\}=0, \tag{48.1}$$

其中 q_i 表示除了 q_1 之外的所有坐标.

我们寻找以下和形式的解:

$$S=S'(q_i,t)+S_1(q_1). \tag{48.2}$$

将这个表达式代入(48.1),可得

$$\Phi\left\{q_i,t,\frac{\partial S'}{\partial q_i},\frac{\partial S'}{\partial t},\varphi\left(q_1,\frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)\right\}=0. \tag{48.3}$$

假设解(48.2)已经得到,那么代入(48.3)后应该使该方程成为恒等式,而这个恒等式(特别是)对于坐标 q_1 的任意值都成立.在 q_1 改变时只有函数 φ 发生变化,所以(48.3)是恒等式要求 φ 是常数.于是,方程(48.3)分成两个方程:

$$\varphi\left(q_1,\frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)=\alpha_1, \tag{48.4}$$

$$\Phi\left\{q_i,t,\frac{\partial S'}{\partial q_i},\frac{\partial S'}{\partial t},\alpha_1\right\}=0. \tag{48.5}$$

其中 α_1 是任意常数.上面第一个是常微分方程,由此方程通过简单的积分可以求出函数 $S_1(q_1)$.还剩下偏微分方程(48.5),但是它的独立变量数目减少了.

如果用这样的方法可以相继地分离所有 s 个坐标和时间,则求哈密顿-雅可比方程的全积分就约化为求积分了.对于保守系统实际上只需要分离方程(47.6)中的 s 个变量(坐标),在完全分离的情况下,方程的全积分写成

$$S=\sum_k S_k(q_k;\alpha_1,\cdots,\alpha_s)-E(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)t, \tag{48.6}$$

其中每个 S_k 都只是一个坐标的函数,而能量 E 是任意常数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的函数,可以通过将 $S_0=\sum S_k$ 代入方程(47.6)求得.

一个特殊情况是循环变量的分离.循环坐标 q_1 不显含于哈密顿函数,所以也不显含于哈密顿-雅可比方程中.此时函数 $\varphi(q_1,\partial S/\partial q_1)$ 约化为 $\partial S/\partial q_1$,由方程(48.4)可求得 $S_1=\alpha_1 q_1$,因此

$$S=S'(q_i,t)+\alpha_1 q_1. \tag{48.7}$$

常数 α_1 正是相应于循环坐标的常值动量 $p_1=\partial S/\partial q_1$.对于一个保守系统而言,$-Et$ 这一项中出现时间 t 相应于对"循环变量" t 的分离.

由此可见,在哈密顿-雅可比方程中分离变量的方法,包括了所有以前研究过的基于循环坐标简化运动方程积分的情况.现在还可以补充一些坐标为非循环坐标,但仍可能分离变量的情况.这一切都表明,哈密顿-雅可比方法是求运动方程通积分的最有力的方法.

为了在哈密顿-雅可比方程中分离变量,适当选择坐标非常关键.我们来看几个在不同坐标下分离变量的例子,它们与质点在各种外场中运动的问题相关,可能具有物理意义.

1. 球坐标.用坐标 (r,θ,φ) 写出的哈密顿函数

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+U(r,\theta,\varphi),$$

如果

$$U=a(r)+\frac{b(\theta)}{r^2}+\frac{c(\varphi)}{r^2\sin^2\theta},$$

其中 $a(r),b(\theta),c(\varphi)$ 是任意函数,则分离变量是可能的.此式最后一项未必有

物理意义，因此，我们取下列形式的场

$$U = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2}. \tag{48.8}$$

在这种情况下对于函数 S_0 的哈密顿－雅可比方程为

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta}\right)^2 + 2mb(\theta)\right] + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2 = E.$$

考虑到 φ 是循环坐标，求以下形式的解

$$S_0 = p_\varphi \varphi + S_1(r) + S_2(\theta),$$

对于函数 $S_1(r)$和 $S_2(\theta)$有方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + 2mb(\theta) + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \beta,$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}r}\right)^2 + a(r) + \frac{\beta}{2mr^2} = E.$$

积分可得

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int\sqrt{\beta - 2mb(\theta) - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta + \int\sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\beta}{r^2}}\mathrm{d}r. \tag{48.9}$$

p_φ, β, E 是任意积分常数，将上式对这 3 个任意常数求导并使之等于新常数，即可给出运动方程的通解.

2. 抛物线坐标

从柱坐标(用 ρ, φ, z 表示)到抛物线坐标 ξ, η, φ 的变换公式为

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \rho = \sqrt{\xi\eta}. \tag{48.10}$$

坐标 ξ 和 η 取值范围是从零到∞，容易证实，ξ 和 η 为常数的曲面是两族旋转抛物面(以 z 轴为对称轴). 引入球坐标中的半径

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2} = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \tag{48.11}$$

关系式(48.10)也可以写成另外一种形式

$$\xi = r + z, \quad \eta = r - z. \tag{48.12}$$

下面我们用坐标 ξ, η, φ 写出质点的拉格朗日函数. 将(48.10)对时间求导并代入用柱坐标表示的拉格朗日函数

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, \varphi, z)$$

得

$$L = \frac{m}{8}(\xi + \eta)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi} + \frac{\dot{\eta}^2}{\eta}\right) + \frac{m}{2}\xi\eta\dot{\varphi}^2 - U(\xi, \eta, \varphi). \tag{48.13}$$

广义动量为

$$p_\xi=\frac{m}{4\xi}(\xi+\eta)\dot{\xi},\quad p_\eta=\frac{m}{4\eta}(\xi+\eta)\dot{\eta},\quad p_\varphi=m\xi\eta\dot{\varphi}.$$

哈密顿函数为

$$H=\frac{2}{m}\frac{\xi p_\xi^2+\eta p_\eta^2}{\xi+\eta}+\frac{p_\varphi^2}{2m\xi\eta}+U(\xi,\eta,\varphi).\tag{48.14}$$

在这种坐标下,物理上有意义的分离变量情况相应于下列形式的势能

$$U=\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta}=\frac{a(r+z)+b(r-z)}{2r}.\tag{48.15}$$

我们有关于 S_0 的方程

$$\frac{2}{m(\xi+\eta)}\left[\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial\xi}\right)^2+\eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial\eta}\right)^2\right]+\frac{1}{2m\xi\eta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta}=E.$$

循环坐标 φ 以 $p_\varphi\varphi$ 的形式分离出来.然后将方程乘以 $m(\xi+\eta)$并重新组合各项,得

$$2\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial\xi}\right)^2+ma(\xi)-mE\xi+\frac{p_\varphi^2}{2\xi}+2\eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial\eta}\right)^2+mb(\eta)-mE\eta+\frac{p_\varphi^2}{2\eta}=0.$$

令

$$S_0=p_\varphi\varphi+S_1(\xi)+S_2(\eta),$$

可得两个方程

$$2\xi\left(\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}\xi}\right)^2+ma(\xi)-mE\xi+\frac{p_\varphi^2}{2\xi}=\beta,$$

$$2\eta\left(\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}\eta}\right)^2+mb(\eta)-mE\eta+\frac{p_\varphi^2}{2\eta}=-\beta.$$

积分可得

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+\int\sqrt{\frac{mE}{2}+\frac{\beta}{2\xi}-\frac{ma(\xi)}{2\xi}-\frac{p_\varphi^2}{4\xi^2}}\mathrm{d}\xi+\int\sqrt{\frac{mE}{2}-\frac{\beta}{2\eta}-\frac{mb(\eta)}{2\eta}-\frac{p_\varphi^2}{4\eta^2}}\mathrm{d}\eta.\tag{48.16}$$

p_φ,β,E 是任意积分常数.

3. 椭圆坐标.坐标 ξ,η,φ 由公式

$$\rho=\sigma\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)},\quad z=\sigma\xi\eta.\tag{48.17}$$

定义,常数 σ 是变换参数.坐标 ξ 取值范围是从 1 到∞,而坐标 η 取值范围是从 -1 到 $+1$.设 z 轴上两个点 A_1 和 A_2 的坐标为 $z=\sigma$ 和 $z=-\sigma$,如果 r_1 和 r_2 是任意点到这两个点的距离:

$$r_1=\sqrt{(z-\sigma)^2+\rho^2},\quad r_2=\sqrt{(z+\sigma)^2+\rho^2},$$

则可以得到几何意义明显的关系式①.将(48.17)代入上式,可得

$$r_1=\sigma(\xi-\eta),\quad r_2=\sigma(\xi+\eta),\quad \xi=\frac{r_2+r_1}{2\sigma},\quad \eta=\frac{r_2-r_1}{2\sigma}.\tag{48.18}$$

将拉格朗日函数从柱坐标表示的形式变换到椭圆坐标表示的形式,可得

$$L=\frac{m\sigma^2}{2}(\xi^2-\eta^2)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2-1}+\frac{\dot{\eta}^2}{1-\eta^2}\right)+\frac{m\sigma^2}{2}(\xi^2-1)(1-\eta^2)\dot{\varphi}^2-U(\xi,\eta,\varphi).\tag{48.19}$$

由此可得哈密顿函数

$$H=\frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2-\eta^2)}\left[(\xi^2-1)p_\xi^2+(1-\eta^2)p_\eta^2+\left(\frac{1}{\xi^2-1}+\frac{1}{1-\eta^2}\right)p_\varphi^2\right]+U(\xi,\eta,\varphi).\tag{48.20}$$

物理上有意义的分离变量情况相应于势能为

$$U=\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi^2-\eta^2}=\frac{\sigma^2}{r_1r_2}\left[a\left(\frac{r_1+r_2}{2\sigma}\right)+b\left(\frac{r_2-r_1}{2\sigma}\right)\right],\tag{48.21}$$

其中 $a(\xi)$,$b(\eta)$是任意函数.在哈密顿-雅可比方程中分离变量的结果给出

$$S=-Et+p_\varphi\varphi+\int\sqrt{2m\sigma^2E+\frac{\beta-2m\sigma^2a(\xi)}{\xi^2-1}-\frac{p_\varphi^2}{(\xi^2-1)^2}}\mathrm{d}\xi+\int\sqrt{2m\sigma^2E-\frac{\beta+2m\sigma^2b(\eta)}{1-\eta^2}-\frac{p_\varphi^2}{(1-\eta^2)^2}}\mathrm{d}\eta.\tag{48.22}$$

习　　题

习题 1　设质点在场

$$U=\frac{\alpha}{r}-Fz$$

(库仑场和均匀场的复合)中运动,试求哈密顿-雅可比方程的全积分,并求这个运动特有的作为坐标和动量函数的守恒量.

解:这个场属于类型(48.15),并且

$$a(\xi)=\alpha-\frac{F}{2}\xi^2,\quad b(\eta)=\alpha+\frac{F}{2}\eta^2.$$

---

① ξ 为常数的曲面是以 A_1 和 A_2 为焦点的一簇椭球面

$$\frac{z^2}{\sigma^2\xi^2}+\frac{\rho^2}{\sigma^2(\xi^2-1)}=1,$$

而 η 为常数的曲面是以 A_1 和 A_2 为焦点的一簇双曲面

$$\frac{z^2}{\sigma^2\eta^2}-\frac{\rho^2}{\sigma^2(1-\eta^2)}=1.$$

用这些函数 $a(\xi)$和 $b(\eta)$,哈密顿－雅可比方程的全积分由(48.16)给出.

为了解释常数 β 的含义,我们写出方程

$$2\xi p_\xi^2+ma(\xi)-mE\xi+\frac{p_\varphi^2}{2\xi}=\beta,$$

$$2\eta p_\eta^2+mb(\eta)-mE\eta+\frac{p_\varphi^2}{2\eta}=-\beta.$$

将两个方程相减①,用柱坐标下的动量 $p_\rho=\partial S/\partial\rho$ 和 $p_z=\partial S/\partial z$ 表示动量 $p_\xi=\partial S/\partial\xi$ 和 $p_\eta=\partial S/\partial\eta$,简单计算后得

$$\beta=-m\left[\frac{\alpha z}{r}+\frac{p_\rho}{m}(zp_\rho-\rho p_z)+\frac{p_\varphi^2}{m\rho^2}z\right]-\frac{m}{2}F\rho^2.$$

方括号中的表达式是纯库仑场特有的运动积分(矢量(15.17)的 z 分量).

习题 2　同上题,但外场为

$$U=\frac{\alpha_1}{r_1}+\frac{\alpha_2}{r_2}$$

(两个相距 2σ 的固定点的库仑场).

解:这个场属于类型(48.21),并且

$$a(\xi)=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\sigma}\xi,\quad b(\eta)=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\sigma}\eta.$$

将这些表达式代入(48.22)可得作用量 $S(\xi,\eta;\varphi,t)$. 常数 β 的含义可以类似于习题 1 的方式得出,在这种情况下它表示如下量的守恒:

$$\beta=\sigma^2\left(p_\rho^2+\frac{p_\varphi^2}{\rho^2}\right)-M^2+2m\sigma(\alpha_1\cos\theta_1+\alpha_2\cos\theta_2),$$

其中

$$M^2=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})^2=p_\rho^2z^2+p_z^2\rho^2+\frac{r^2p_\varphi^2}{\rho^2}-2z\rho p_zp_\rho,$$

而 θ_1 和 θ_2 是图 55 所示的角度.

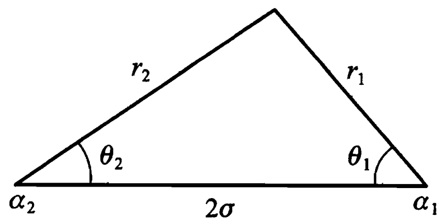


图 55

§49　浸渐不变量

我们研究一个由某个参数 λ 表征并作一维有限运动的力学系统,参数 λ 可以确定系统本身或者系统所处外场的性质②.

假设参数 λ 在某个外因影响下随时间缓慢(浸渐地)变化. 缓慢的意思是在一个运动周期 T 时间内 λ 的变化很小,即

① 实际上由两个方程消去含 E 的项而不是直接相减,再作后面的计算更简单.——译者注

② 为了简化公式,我们假设只有一个这样的参数,但是所有的结论对任意多个参数情况也成立.

$$T\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} \ll \lambda. \tag{49.1}$$

如果 λ 为常数,系统是封闭的且具有常能量 E 并以确定的周期 $T(E)$ 作严格周期运动.当 λ 变化时,系统不再是封闭的,能量不守恒.但是因为假设 λ 仅缓慢变化,所以能量 E 的变化率 $\dot{E}$ 也很小.如果按周期 T 平均这个变化率,因而消除其中的"快"振动,则所得的值 $\dot{E}$ 确定了系统能量的平缓变化率,它正比于参数的变化率 $\dot{\lambda}$.换句话说,在这种意义上所取的缓慢变化量 E 将是 λ 的某个函数.E 对 λ 的依赖关系可以写成 E 和 λ 的某种组合等于常数的形式.在含有缓变参数的系统运动过程中保持不变的这个量称为*浸渐不变量*.

设 $H(q,p,\lambda)$ 是依赖于参数 λ 的系统的哈密顿函数.根据公式(40.5),系统能量的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}. \tag{49.2}$$

这个公式右端表达式不仅仅依赖于缓变量 λ,而且依赖于快变量 q,p.为了确定能量的平缓变化,按照上面的讨论,应该按运动周期平均等式(49.2).考虑到 λ 变化缓慢($\dot{\lambda}$ 变化也缓慢),可以将 $\dot{\lambda}$ 移到平均化符号之外:

$$\overline{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}, \tag{49.3}$$

在被平均的函数 $\partial H/\partial\lambda$ 中只将 q,p 看作变量,而 λ 不看作变量.换句话说,对如果 λ 保持不变时系统将发生的运动取平均.

我们将平均化写成显式为

$$\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\partial H}{\partial \lambda}\mathrm{d}t.$$

根据哈密顿方程 $\dot{q}=\partial H/\partial p$ 或者

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}q}{\partial H/\partial p}$$

对时间的积分因而可以换为对坐标的积分,并且周期 T 写成

$$T=\int_0^T\mathrm{d}t=\oint\frac{\mathrm{d}q}{\partial H/\partial p}, \tag{49.4}$$

这里符号 $\oint$ 表示对坐标在一个周期时间内完整变化("向前"和"向后")范围的积分①.于是,公式(49.3)变为

① 如果系统的运动是转动,而坐标 q 是某个转角 φ,则对 φ 的积分应该是沿着"完整一圈",即从零到 2π.

$$\overline{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} \frac{\oint \frac{\partial H/\partial \lambda}{\partial H/\partial p}\mathrm{d}q}{\oint \frac{\mathrm{d}q}{\partial H/\partial p}}. \tag{49.5}$$

前面已经指出过,这个公式中的积分应该沿着 λ 为给定常数的运动轨道进行.沿着这个轨道哈密顿函数保持常值 E,而动量是变化的坐标 q 和两个独立常参数E,λ 的确定函数.因此,将动量当作函数 $p(q;E,\lambda)$并将方程 $H(p,q;\lambda)=E$ 对参数λ 求导,得

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0$$

或者

$$\frac{\partial H/\partial \lambda}{\partial H/\partial p} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda}.$$

将此式代入(49.5)的分子中并将分母中的被积函数写成$\partial p/\partial E$,有

$$\overline{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}} = -\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} \frac{\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda}\mathrm{d}q}{\oint \frac{\partial p}{\partial E}\mathrm{d}q}$$

或者

$$\oint \left(\frac{\partial p}{\partial E}\overline{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}} + \frac{\partial p}{\partial \lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}q = 0.$$

这个等式最后可以写成

$$\overline{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}} = 0, \tag{49.6}$$

其中 I 表示沿着E,λ 给定的运动轨道积分

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\mathrm{d}q. \tag{49.7}$$

这个结果表明,当参数 λ 变化时,在这里所考虑的近似下 I 保持常数,即 I 是浸渐不变量.

量 I 是系统能量(和参数 λ)的函数,它对能量的偏导数确定运动周期:根据(49.4),有

$$2\pi\frac{\partial I}{\partial E} = \oint \frac{\partial p}{\partial E}\mathrm{d}q = T, \tag{49.8}$$

或者

$$\frac{\partial E}{\partial I} = \omega, \tag{49.9}$$

其中 $\omega = 2\pi/T$ 是系统的振动频率.

如果利用系统相轨道的概念,积分(49.7)有明显的几何意义.在所考虑的一

个自由度的情况下,相空间退化为有坐标 p,q 的二维空间(即平面),而周期运动系统的相轨道是这个平面上的封闭曲线.沿着这条曲线的积分(49.7)是该曲线所包围的面积,它也可以写成为面积分的形式

$$I = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}p\mathrm{d}q. \tag{49.10}$$

作为例子,我们来确定一维振子的浸渐不变量.它的哈密顿函数为

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2q^2}{2}, \tag{49.11}$$

其中 ω 是振子的固有频率.相轨道方程由能量守恒定律给出:

$$H(p,q)=E.$$

这是半轴为$\sqrt{2mE}$和$\sqrt{2E/m\omega^2}$的椭圆,它的面积(除以 2π)为

$$I=E/\omega. \tag{49.12}$$

I 的浸渐不变性意味着,当振子的参数缓慢变化时,能量和频率成正比.

§50 正则变量

下面设参数 λ 为常数,因此所讨论的系统是封闭的.

我们做变量 q,p 的正则变换,选取 I 作为新的"动量".这时表示为 q,I 的函数的"简约作用量"S_0 就是母函数.事实上,S_0 定义为给定能量 E 和参数λ 时的积分

$$S_0(q,E;\lambda) = \int p(q,E;\lambda)\mathrm{d}q. \tag{50.1}$$

但是,对于封闭系统,I 只是能量的函数,所以 S_0 可以完全同等地表示成函数 $S_0(q,I;\lambda)$ 的形式,偏导数 $(\partial S_0/\partial q)_E=p$ 等于 I 为常数时的偏导数 $(\partial S_0/\partial q)_I$.因此

$$p=\frac{\partial S_0(q,I;\lambda)}{\partial q}, \tag{50.2}$$

这相应于正则变换(45.8)中第一个公式.第二个公式确定新"坐标",我们用 w 表示:

$$w=\frac{\partial S_0(q,I;\lambda)}{\partial I}. \tag{50.3}$$

变量 I 和 w 称为正则变量,I 称为作用变量,w 称为角变量.

由于母函数 $S_0(q,I;\lambda)$不显含时间,所以新的哈密顿函数 H'就是用新变量表示的老的H.换句话说,H'是表示为作用变量的函数的能量$E(I)$.相应地,正则变量的哈密顿方程为

$$\dot{I}=0,\quad \dot{w}=\frac{\mathrm{d}E(I)}{\mathrm{d}I}. \tag{50.4}$$

正如本该如此的那样，第一个方程表明 I 是常数. 能量是常数，I 也是常数. 由第二个方程可知，角变量是时间的线性函数：

$$w = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}I}t + \mathrm{const} = \omega(I)t + \mathrm{const}, \tag{50.5}$$

这是振动相位.

作用量 $S_0(q,I)$是坐标的多值函数. 每经过一个周期，这个函数不回到原来的值，而是有一个增量

$$\Delta S_0 = 2\pi I. \tag{50.6}$$

从(50.1)和 I 的定义(49.7)来看这是很显然的. 在同样的时间内，角变量的增量为

$$\Delta w = \Delta\frac{\partial S_0}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I}\Delta S_0 = 2\pi. \tag{50.7}$$

相反地，如果我们用正则变量 I, w 表示 q, p，或者它们的任何单值函数 $F(q,p)$，则 w 增加 2π(I 不变)时，这些函数的值保持不变. 换言之，用正则变量 I, w 表示的任何单值函数 $F(q,p)$是 w 的周期为 2π 的周期函数.

对于参数 λ 随时间变化的非封闭系统，运动方程也可以用正则变量 I, w 表示. 由积分(50.1)定义并用积分(49.7)给定的变量 I 表示的 S_0 为母函数，按公式(50.2)和(50.3)仍然可以实现到这些变量的变换. 这时就如同参数 $\lambda(t)$有已知的固定值时那样计算不定积分(50.1)和定积分(49.7)，就是说，$S_0(q,I;\lambda(t))$是先前参数 λ 为常数时的母函数，但最后用给定函数 $\lambda(t)$代替了常参数 λ①.

因为现在母函数像参数 λ 一样显含时间，新哈密顿函数 H' 与老哈密顿函数(即能量 $E(I)$)不同. 根据正则变换一般公式(45.8)有

$$H' = E(I;\lambda) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = E(I;\lambda) + \Lambda\dot{\lambda}, \tag{50.8}$$

其中引入了记号

$$\Lambda = \left(\frac{\partial S_0}{\partial \lambda}\right)_{q,I}, \tag{50.9}$$

这里在对 λ 微分后，Λ 应该根据公式(50.3)用 I, w 表示.

现在哈密顿方程为

$$\dot{I} = -\frac{\partial H'}{\partial w} = -\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial w}\right)_{I,\lambda}\dot{\lambda}, \tag{50.10}$$

---

① 然而，需要强调的是，按这种方式确定的函数 S_0 已经不是哈密顿函数显含时间的系统的真实简约作用量！

$$\dot{w}=\frac{\partial H'}{\partial I}=\omega(I;\lambda)+\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial I}\right)_{w,\lambda}\dot{\lambda}, \tag{50.11}$$

其中 $\omega=(\partial E/\partial I)_\lambda$ 是振动频率，也是如同 λ 是常数时那样计算的.

习　题

习题　对频率依赖于时间的简谐振子（哈密顿函数为(49.11)）写出用正则变量 I,w 表示的运动方程.

解：因为在(50.1)—(50.3)中的所有运算都是对常数 λ（在现在的情况下 λ 为频率 ω 自身）进行的，因此 q,p 与 w 的关系与频率不变（$w=\omega t$）时有相同的形式：

$$q=\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin w=\sqrt{\frac{2I}{m\omega}}\sin w,\quad p=\sqrt{2I\omega m}\cos w.$$

由此得

$$S_0=\int p\mathrm{d}q=\int p\left(\frac{\partial q}{\partial w}\right)_{I,\omega}\mathrm{d}w=2I\int\cos^2 w\mathrm{d}w.$$

然后有

$$\Lambda=\left(\frac{\partial S_0}{\partial \omega}\right)_{q,I}=\left(\frac{\partial S_0}{\partial w}\right)_I\left(\frac{\partial w}{\partial \omega}\right)_q=\frac{I}{2\omega}\sin 2w.$$

于是，方程(50.10)和(50.11)变为

$$\dot{I}=-I\frac{\dot{\omega}}{\omega}\cos 2w,\quad \dot{w}=\omega+\frac{\dot{\omega}}{2\omega}\sin 2w.$$

§ 51　浸渐不变量守恒的准确度

利用(50.10)形式的运动方程可以进一步证明作用变量是浸渐不变量.

函数 $S_0(q,I;\lambda)$ 不是 q 的单值函数，当坐标变化回到初始值时，S_0 增加 $2\pi I$ 的整数倍. 然而，导数(50.9)是单值函数，因为求导是在 I 为常值时进行的，S_0 的增量不出现于求导结果中. 像任何单值函数一样，当 Λ 用角变量 w 表示时是一个周期函数. 周期函数的导数 $\partial\Lambda/\partial w$ 对周期的平均值等于零. 所以对方程(50.10)取平均并将 $\dot{\lambda}$ 移出平均值之外（当 λ 仅缓慢变化时），可得

$$\overline{\dot{I}}=-\overline{\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial w}\right)_I}\dot{\lambda}=0, \tag{51.1}$$

于是结论得证①.

① 角变量 w 在浸渐过程中的行为由 J. Hannay 给出，现称为 Hannay 角. 参见 Hannay J. Angle variable holonomy in adiabatic excursion of an integrable Hamiltonian. J. Phys. A: Math. Gen, 1985, 18: 221; Berry M V. Classical adiabatic angles and quantum adiabatic phase. J. Phys. A: Math. Gen, 1985, 18: 15. ——译校者注

利用运动方程(50.10)和(50.11)可以研究浸渐不变量守恒的准确度.我们可以将这个问题表述如下:设当 $t\to-\infty$ 和 $t\to+\infty$ 时,参数 $\lambda(t)$ 趋向于定常极限值 λ_- 和 λ_+,浸渐不变量($t=-\infty$ 时)的初值 I_- 给定,我们求 $t=+\infty$ 时的增量 $\Delta I=I_+-I_-$.

由方程(50.10)有

$$\Delta I=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\Lambda}{\partial w}\dot{\lambda}\,\mathrm{d}t. \tag{51.2}$$

前面已经证明过 Λ 是变量 w 的周期函数(周期为 2π),我们将它展开为傅里叶级数:

$$\Lambda=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}lw}\Lambda_l \tag{51.3}$$

由于 Λ 为实数,展开式的系数满足关系 $\Lambda_{-l}=\Lambda_l^*$.由此得

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial w}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\mathrm{i}l\mathrm{e}^{\mathrm{i}lw}\Lambda_l=2\mathrm{Re}\sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{i}l\mathrm{e}^{\mathrm{i}lw}\Lambda_l. \tag{51.4}$$

当 $\dot{\lambda}$ 足够小时,导数 $\dot{w}$ 是正的(它的符号与 ω 的符号相同,参见(50.11)),即 w 是时间 t 的单调函数.因此在将(51.2)从对 t 积分变换为对 w 积分时,积分限不变,即

$$\Delta I=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\Lambda}{\partial w}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}w}\mathrm{d}w. \tag{51.5}$$

将(51.4)代入此式并将 w 在形式上看作复变量来进行积分变换.假设被积函数对于实的 w 没有奇点,将积分路径从实轴移到该复变量 w 的上半平面.这时回路绕过被积函数的奇点"连接",形成围绕奇点的环路,如图 56 所示.

设 w_0 是最接近实轴的奇点,即有最小(正的)虚部的奇点.在积分(51.5)中这个点的邻域的贡献是主要的,并且级数(51.4)的每一项给出包含因子 $\exp(-l\,\mathrm{Im}\,w_0)$ 的贡献.又仅保留负指数有最小量值的项(即 $l=1$ 的项),可得①

$$\Delta I\sim\exp(-\mathrm{Im}\,w_0). \tag{51.6}$$

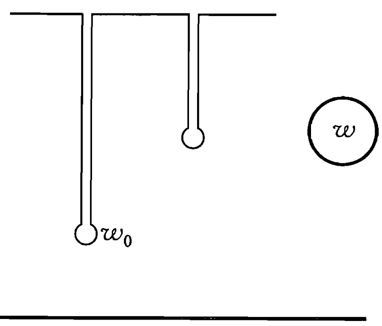


图 56

设 t_0 是相应于奇点 w_0 的时刻(复数!):$w(t_0)=w_0$.一般来说,$|t_0|$ 的量级与系统参数变化的特征时间相同,我们用 τ

① 在特殊情况下,展开式(51.4)中可能不包含 $l=1$ 的项(例如,参见本节习题 1),在任何情况下都必须取级数中出现的 l 为最小值的项.

表示这个时间①.在(51.6)中指数的量级为

$$\operatorname{Im} w_0 \sim \omega\tau \sim \tau/T. \tag{51.7}$$

按照假设,$\tau \gg T$,因此这个指数很大.于是差值 $I_+ - I_-$ 随着系统参数的变化率减小而指数衰减②.

为了确定关于 T/τ 的一阶近似下的 w_0(即在指数中只保留$(T/\tau)^{-1}$量级的项),可以在方程(50.11)中略去含 $\dot{\lambda}$ 的小量项,即写成

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \omega(I, \lambda(t)), \tag{51.8}$$

并且将函数 $\omega(I,\lambda(t))$的自变量 I 取为一个常数值,比如 I_-.那么

$$w_0 = \int^{t_0} \omega(I, \lambda(t))\mathrm{d}t \tag{51.9}$$

(积分下限可以取任意实数值 t,因为它对所要求的 w_0 的虚部没有影响)③.

由(51.8)得到的$\dot{w}$(并取级数(51.4)中的一项作为$\partial\Lambda/\partial w$),积分(51.5)变为

$$\Delta I \sim \operatorname{Re}\int \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} \frac{\dot{\lambda}\,\mathrm{d}w}{\omega(I,\lambda)}. \tag{51.10}$$

由此可见,关于最接近实轴而需要考虑的奇点是函数$\dot{\lambda}$和$1/\omega(t)$的奇点(极点、支点).这里需要记住的是,ΔI 为指数小量的结论是与上述函数没有实奇点的假设相关的.

习　　题

习题 1　设简谐振子的频率按规律

$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{1 + a\mathrm{e}^{\alpha t}}{1 + \mathrm{e}^{\alpha t}}$$

从 $t = -\infty$ 时的值 $\omega_- = \omega_0$ 到 $t = \infty$ 时的值 $\omega_+ = \sqrt{a}\omega_0$($a > 0, \alpha \ll \omega_0$)缓慢变化,试估算 ΔI 的量级④.

解:将频率 ω 自身取为参数λ,有

$$\frac{\dot{\lambda}}{\omega} = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{a}{\mathrm{e}^{-\alpha t} + a} - \frac{1}{\mathrm{e}^{-\alpha t} + 1}\right).$$

---

① 如果参数 λ 变化的缓慢性仅可通过比值$\xi = t/\tau$ 表示为对时间t 的依赖关系,其中 τ 很大,则 $t_0 = \tau\xi_0$,其中 ξ_0 是函数 $\lambda(\xi)$不依赖于 τ 的奇点.

② 应该注意,如果函数 $\lambda(t)$的初值和终值相等($\lambda_- = \lambda_+$),则不仅差 ΔI 是指数小量,而且能量的终值和初值之差 $\Delta E = E_+ - E_-$也是指数小量,根据公式(49.9),在这种情况下 $\Delta E = \omega\Delta I$.

③ 这些论点的更详细的证明以及(51.6)中指数的系数的计算可参见论文:Слуцкин А. А.// ЖЭТФ. -1963. -Т.45. -С. 978. Slutskin A A. Motion of a one-dimensional nonlinear oscillator under adiabatic conditions. Soviet Physics JETP,1964,18:676.

④ 振子的简谐性反映在振动频率不依赖于能量.

当 $e^{-\alpha t}=-1$ 和 $e^{-\alpha t}=-a$ 时,这个函数有极点.计算积分 $\int \omega \mathrm{d}t$,我们发现 $\mathrm{Im}w_0$ 的最小值来自于极点之一 $\alpha t_0=-\ln(-a)$,且为

$$\mathrm{Im}w_0=\begin{cases}\omega_0\pi/\alpha & (a>1),\\ \omega_0\pi\sqrt{a}/\alpha & (a<1).\end{cases}$$

对于简谐振子,$\Lambda\sim\sin 2w$(参见§50 的习题),所以级数(51.3)约化为两项($l=\pm 2$).因此,对简谐振子

$$\Delta I\sim\exp(-2\mathrm{Im}w_0).$$

习题 2 质点在势阱中振动.试求在摩擦力 $f_{\mathrm{fr}}=-\alpha\dot{x}$ 作用下能量变化规律,其中系数 α 很小,x 为笛卡儿坐标.

解:按振动周期平均方程(25.13),在一阶近似中忽略阻尼.有

$$\overline{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}=-\overline{\alpha\dot{x}^2}=-\frac{\alpha}{T}\int_0^T\dot{x}^2\mathrm{d}t=-\frac{\alpha}{T}\oint\dot{x}^2\mathrm{d}t=-\frac{2\pi\alpha}{mT}I(\overline{E}),$$

其中 $I(E)$是浸渐不变量,m 是质点的质量.根据(49.8),用 I 表示振动周期 T,求得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\overline{E}}\frac{\mathrm{d}\overline{E}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\alpha}{m}I.$$

积分得

$$I(\overline{E})=I(E_0)\exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right).$$

这个公式隐含地确定了 $\overline{E}(t)$.对于简谐振子,这个公式变为(25.5).这个解在 $\alpha T/m\ll 1$的条件下成立.

§52 条件周期运动

我们研究多自由度封闭系统的有限运动(所有坐标都是有限的).并假设用哈密顿-雅可比方法变量可以完全分离.这就是说,适当选择坐标可以使简约作用量写为如下函数之和的形式

$$S_0=\sum_i S_i(q_i),\tag{52.1}$$

其中每个函数都仅依赖于一个坐标.

因为广义动量为

$$p_i=\frac{\partial S_0}{\partial q_i}=\frac{\mathrm{d}S_i}{\mathrm{d}q_i},$$

所以每个函数 S_i 都可以写成

$$S_i=\int p_i\mathrm{d}q_i.\tag{52.2}$$

这些函数是多值函数.根据运动有限性,每个坐标都只能在有限范围内取值.当 q_i 在此范围内"向前"和"向后"变化时,作用量获得增量为

$$\Delta S_0 = \Delta S_i = 2\pi I_i, \tag{52.3}$$

其中 I_i 是沿着刚提到的 q_i 变化计算的积分①

$$I_i = \frac{1}{2\pi}\oint p_i \mathrm{d}q_i. \tag{52.4}$$

现在进行类似于 § 50 对于一个自由度系统所做的正则变换.新变量是"作用变量" I_i 和"角变量"

$$w_i = \frac{\partial S_0(q, I)}{\partial I_i} = \sum_k \frac{\partial S_k(q_k, I)}{\partial I_i}, \tag{52.5}$$

其中母函数还是表示为坐标和 I_i 的函数形式的作用量.这些变量的运动方程是

$$\dot{I}_i = 0, \quad \dot{w}_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i}$$

它们给出

$$I_i = \text{const}, \tag{52.6}$$

$$w_i = \frac{\partial E(I)}{\partial I_i} t + \text{const}. \tag{52.7}$$

类似(50.7)也可得,坐标 q_i 的完整变化("向前"和"向后")对应于 w_i 变化 2π:

$$\Delta w_i = 2\pi. \tag{52.8}$$

也就是说,$w_i(q, I)$是坐标的多值函数,当坐标变化并回到初值时,w_i 可能改变了 2π 的整数倍.这个性质也可以表达为用坐标和动量表示的函数 $w_i(p, q)$在系统的相空间中的性质.既然用 q, p 表示的 I_i 是这些变量的单值函数,则将 $I_i(p, q)$代入 $w_i(q, I)$可得函数 $w_i(p, q)$,在相空间中沿着任意封闭曲线绕行一周,它可能改变 2π 的整数(或者零)倍.

由此可见,系统状态的任何单值函数 $F(p, q)$②,如果用正则变量 I, w 表示,是角变量的周期函数,并且对每个变量的周期均为 2π.这个函数可以展开成多重傅里叶级数

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \cdots l_s} \exp[\mathrm{i}(l_1 w_1 + \cdots + l_s w_s)]$$

---

① 但是,应该强调指出,这里所指的是坐标 q_i 在其整个允许值范围内形式上的变化,不是像一维运动情况那样在实际运动周期内的变化.多自由度系统实际的有限运动,在一般情况下不仅整个运动不是周期的,而且甚至每个坐标单独随时间的变化也不是周期的(见下文).

② 因为相差 2π 整数倍的 φ 对应于系统的同一个状态,所以"转动坐标" φ(参见 § 49 的第二个脚注)与系统状态的关系不是一一对应的.因此,如果在坐标 q 中有这样的角 φ,则在函数 $F(q, p)$中所包含的 φ,只能是形如 $\sin\varphi$ 或者 $\cos\varphi$ 的表达式,这样的表达式与系统状态之间的关系是一一对应的.

($l_1, l_2, \cdots, l_s$ 是整数).将作为时间函数的角变量代入,可得 F 对时间的依赖关系,由下面形式的和给出

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} A_{l_1 l_2 \cdots l_s} \exp\left\{ \mathrm{i}t \left(l_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + l_2 \frac{\partial E}{\partial I_2} + \cdots + l_s \frac{\partial E}{\partial I_s} \right) \right\}. \tag{52.9}$$

这个和中的每一项都是时间的周期函数,其频率

$$l_1 \omega_1 + \cdots + l_s \omega_s, \tag{52.10}$$

是基频

$$\omega_i = \frac{\partial E}{\partial I_i} \tag{52.11}$$

的整数倍之和.既然所有频率(52.10)一般不是某一个频率的整数(或有理数)倍,则整个和(52.9)不是严格的周期函数.特别地,系统的坐标 q 和 p 本身也不是周期函数.

因此,系统的运动,无论作为整体还是对任一坐标,一般不是严格周期的.这就是说,如果系统经过某个状态,那么系统在有限时间内都不会重新经过这个状态.但是可以肯定,在足够长的时间内,系统会任意接近这个状态.由于这个性质,这种运动称为条件周期运动.

在很多特殊情况下,基频 ω_i 中有两个(或更多个)在 I_i 取任意值时是可公度的,这称之为简并.如果所有 s 个频率是可公度的,则系统的运动称为完全简并.显然,在后一种情况下,运动是严格周期的,所有质点的轨道都是封闭的.

首先,存在简并导致系统能量所依赖的独立变量(I_i)的数量减少.设两个频率 ω_1 和 ω_2 满足关系式

$$n_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} = n_2 \frac{\partial E}{\partial I_2}, \tag{52.12}$$

其中 n_1 和 n_2 是整数,则由此可见,I_1 和 I_2 仅以和 $n_2 I_1 + n_1 I_2$ 的形式出现在能量中.

简并运动最重要的特性是,单值的运动积分数目与有相同自由度的一般非简并系统的运动积分数目相比增加了.在非简并情况下,在($2s-1$)个运动积分中仅有 s 个系统状态函数是单值的,例如 s 个 I_i 可以是这样的单值运动积分,其余的 $s-1$ 个积分可以写成差的形式

$$w_i \frac{\partial E}{\partial I_k} - w_k \frac{\partial E}{\partial I_i}. \tag{52.13}$$

由公式(52.7)直接可以得出这些差是常数,但是由于角变量的非单值性,这些差不是系统状态的单值函数.

存在简并时情况就不同了.例如,根据关系式(52.12),积分

$$w_1 n_1 - w_2 n_2 \tag{52.14}$$

尽管不是单值的,但是多值性仅归结为增加 2π 的任意整数倍.所以只要取这些量的三角函数就可以得到新的单值运动积分.

在场 $U = -\alpha/r$ 中的运动(见本节习题)就是简并运动的例子.正是存在简并导致系统出现新的为此场所特有的单值运动积分(15.17),而系统的两个(因为运动是二维平面运动)通常的单值运动积分,即角动量 M 和能量 E,是任何有心力场中的运动都有的.

我们也应该注意到,出现附加单值积分反过来使简并运动具有一个特性:简并运动允许不只是在一种确定的坐标选择下,而是在多种不同的坐标选择下可以完全分离变量①.事实上,用可以分离变量的坐标表示的 I_i 是单值运动积分.但是存在运动简并时,单值运动积分数大于 s,所以所需 I_i 的选择不是唯一的.

仍以开普勒运动为例,它在球坐标和抛物线坐标下都可以分离变量.

在§49 已经证明,在一维有限运动中作用变量是浸渐不变量.对于多自由度系统这个结论也正确.直接推广§51 开始介绍的方法就可以在一般情况下给予证明.

对于含可变参数 $\lambda(t)$ 的多维系统,用正则变量 I, w 写出的运动方程,给出类似于(50.10)的每个作用变量 I_i 的变化率表达式

$$\dot{I}_i = -\frac{\partial \Lambda}{\partial w_i}\dot{\lambda}, \tag{52.15}$$

其中,与前面一样,$\Lambda = (\partial S_0/\partial\lambda)_I$.对这个方程的平均化应该在这样的时间间隔内进行,它比系统的基本周期长,但比参数 $\lambda(t)$ 变化的时间短.这时 $\dot{\lambda}$ 可以移到平均符号之外,因而变为对导数 $\partial\Lambda/\partial w_i$ 求平均,这如同 λ 是常数时发生的运动,是条件周期运动.这样 Λ 就是角变量 w_i 的单值周期函数,$\partial\Lambda/\partial w_i$ 的平均值等于零.

最后我们对多自由度(s)封闭系统有限运动在一般情况下的性质作几点简短的讨论,这时不假设哈密顿-雅可比方程可以分离变量.

数目等于自由度的运动积分 I_i 的单值性是可分离变量系统的基本性质.然而,在系统不能分离变量的一般情况下,单值运动积分只包括那些反映空间、时间的均匀性和各向同性的不变的量,即单值运动积分就是能量守恒、动量守恒和角动量守恒.

系统的相轨道通过相空间中由单值运动积分的给定常数值所确定的区域.对于可分离变量的系统,s 个单值运动积分确定了相空间中的 s 维流形(超曲面).在足够长的时间内,系统的相轨道无限稠密地覆盖这个超曲面.

---

① 这时我们不考虑形如 $q_1' = q_1'(q_2)$,$q_2' = q_2'(q_1)$ 的简单变换.

然而,对于不能分离变量的系统,单值运动积分数少于 s,在相空间中相轨道(完全或者部分地)充满维数比 s 高的区域(流形).另一方面,在简并系统中,有多于 s 个运动积分,相轨道占据维数小于 s 的流形.

最后需要指出,如果系统的哈密顿函数与可以分离变量的函数仅相差很小的项,则运动性质接近条件周期运动的性质,并且两者之差是比哈密顿函数中附加小量项更高阶的小量.

习　题

习题　试求在场 $U=-\alpha/r$ 中椭圆运动的作用变量.

解:在运动平面中,采用极坐标 r,φ 有

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_\varphi \mathrm{d}\varphi = M,$$

$$I_r = \frac{2}{2\pi}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{r^2}}\mathrm{d}r = -M+\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}.$$

由此得作用变量表示的能量

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2(I_r+I_\varphi)^2}.$$

能量仅依赖于变量之和 I_r+I_φ 表明运动简并,(在 φ 和 r 方向的)两个基频相等.

轨道参数 p 和 e(参见(15.4))用 I_r, I_φ 表示为

$$p=\frac{I_\varphi^2}{m\alpha},\quad e^2=1-\left(\frac{I_\varphi}{I_\varphi+I_r}\right)^2.$$

由于 I_r 和 I_φ 是浸渐不变量,在系数 α 或者质量 m 缓慢变化时,轨道偏心率保持不变,而轨道的尺度变化反比于 α 和 m.

朗道撰写的第一版序

理论物理学教程·力学

众所周知,物理学是由实验物理和理论物理两个学科组成的.我们已知的大量物理定律可以由为数不多的最一般规律推演出来.这样的推演和最一般规律的建立需要独特的方法,这些构成了特别的学科——理论物理学的任务.

理论物理利用数学手段和方法得出自己的结果和结论,但理论物理与数学的截然不同在于前者与实验结果的直接联系,且不说最一般规律的建立只能以实验数据为基础,甚至从一般规律中得到推论也需要对现象做预先的实验研究,没有这样的实验研究,就无法从大量参与因素中判断哪些因素是重要的,哪些因素是可以忽略的.在得到只考虑重要因素的方程之后,从本质上说,理论物理的任务就基本完成了.进一步应用这些方程于复杂程度不同的具体情况很快成为数学的研究对象,由称为数学物理的一个数学分支来研究.

理论物理的目标是建立物理定律,即建立物理量之间的关系.确定物理量的具体数值一般不是理论物理的任务,实验在处理这些问题方面相对比较容易,因为在绝大多数情况下,实验不必进行花费大量时间和人力的类似的计算.当然,用理论可以直接算出数值的简单情况除外①.

必须指出,由于理论物理的任务是建立刻画给定现象的物理量之间的联系,因此只有在自然界确实存在这种联系时,才能建立理论.但是,经常是我们感兴趣的物理量之间毫无关系,亦即在不同的自然现象中可以在极为不同的组合中遇到这些物理量.因此,缺乏某个现象的理论并不意味着它无法解释.如同在其它情况下规律性可以由最一般的规律得出一样,在这种情况下不存在规律性的

---

① 朗道写这个序言是在 1940 年,那时的计算手段很落后,所以数值计算比实验还困难.——译者注

结论也能从最一般的规律得出.

近似分析在理论物理中起着极大的作用.首先,所有精确的规律都是近似的,尽管在绝大多数情况下这种近似给出的精确度非常高.其次,对物理规律并没有绝对精确的要求.如果事先确定了某个现象的研究范围,给出的规律只要满足问题所设的精度要求也就足够.因此,我们仍然使用牛顿力学来研究炮弹的运动,尽管我们不仅知道这个力学不是绝对精确的,而且我们也掌握了更加精确的相对论力学.

正因为如此,在理论物理中有一些早已被证实不太精确的理论(通常称为经典理论)与精确理论并存并和睦相处,这是因为它们对于现象的特定研究范围仍有应用价值.任何逻辑上封闭的、其真实性在一定精确程度上被实验所证实的理论永远不会失去价值,而是作为特殊情况下成立的近似结果被所有后来更为精确的理论所包含.当然,这不包括那些存在内在矛盾的理论,它们仅在理论物理发展的某一个阶段具有价值.

由此可见,近似在一般物理理论中起着重要作用,在从一般规律推导具体规律的过程中其作用也毫不逊色.考虑非重要因素的过于精确的计算不仅会使计算结果毫无价值地复杂化,甚至还会导致存在于现象中的规律被忽视.事实上,不仅规律的具体形式是近似的,而且刻画现象的物理量之间的函数关系也是近似的,超出给定精度极限,这些物理量的关系可能是任意的.

确定所研究现象的近似程度在理论研究中是极端重要的.最严重的错误是,采用非常精确的理论并详细计算所有的细节修正,同时却忽略了比它们大得多的物理量.

Л.Д.朗道

1940 年

索引

郑重声明